

8 第 8 回：意味のパラドックス

きょうの予定

- 砂山の逆理のレポ - トから (2)
- 因果性の数学的意味 (続き)
- 嘘付きの逆理

8.1 砂山の逆理のレポ - トから (2)

8.1.1 抜粋

- [R1] 明確な境界がないことが原因 (Mom)
- [R2] 砂山を積み上げる人には山は見えない (Tak)
- [R3] 砂山かどうかは認識者に依存する (Sak,Sas,Suz,Ok,Miyk,Ish)
- [R4] 砂山であると、砂山であるともそうでないとも言える、砂山でない、の 3 つの段階がある (Sak,Kik)
- [R5] 数学的帰納法は使えない (A-Sat,Ma)
- [R6] 自分が山だと思えばそれが山である。... 意見が違う時に議論してもよいが、それは数学ではなく感覚のみによる議論でなければならない (In)
- [R7] 砂粒自身やその個数というものは単体で人の主観の方向を決定することはない (Mit)
- [R8] 山という概念のあいまいさだけでなく、米粒を加える方法のあいまいさもある (Yos)
- [R9] 実際には「山」、この一言で済む (Sor)
- [R10] 砂山の概念は、砂の数だけでなく、砂の積み方にも関係する (Miyz)
- [R11] 形容詞的概念を細かくはっきりとした型にはめて論じることが不可能だ (Kom)
- [R12] 日常を非日常から見た視点があるように思う (Sas)
- [R13] 砂山かどうかの判断は人・時・場合に依存する 砂の塊の全体を突然見せられたときと、一粒一粒を順に見せられたときとは、反応が違う (Suz)
- [R14] $n - 1$ の時は砂山ではなくて n の時に砂山になる n は存在しません。砂一粒でそんなことは起こりません。でも砂山は存在しているわけです きっと山という言葉自体があいまいなもので数学に合わないんだと思う (Yam)
- [R15] 数学的に用いられる言語は、明確な定義がなされているが、われわれが日常生活で用いている言語は、それを用いている人々の共通認識である極めて基本的な概念を基に、幅広い許容範囲を持っている (Och)
- [R16] この逆理はどこまでが定義で、どこからが命題なのか (Och)
- 定義とは、名称をつけるだけのことに等しい。
 - 「 ” 小さい数 ” を何個加えても ” 小さい数 ” である 」 における 2 つの ” 小さい数 ” は明らかに別の記号になると思う。
- [R17] 砂山を明確に何粒以上かを決めないとこの逆理は解決できないが、しかし、決めることも現実的に考えると明らかに無理がある (Nib)

- [R18] この逆理の最大の過ちは、「数学の世界」に「人間の感覚」を導入してしまったことだ ... 数学の世界には砂山という概念はなく、あるのは「砂の集合」である (Ok)
- [R19] 私にとり砂山とは5粒以上の砂の集まりなので、この逆理の議論の中の「 n 粒のすなが砂山でなければ $n+1$ 粒のすなも砂山でない」が成り立たない (したがって、私には、この議論は単に間違っているだけで、逆理ではない.) (Kat)
- [R20] 数学的帰納法が適用できない。自然数の概念に問題があると考える (Sat)

8.1.2 砂のつみ方の問題

- 砂山の概念は、砂の数だけでなく、砂のつみ方にも関係する (Miyz)

8.1.3 複数の視点・立場の混在

- 砂山を積み上げる人には山は見えない (Tak)
- 砂の塊の全体を突然見せられたときと、一粒一粒を順に見せられたときとでは、反応が違う (Suz)

8.1.4 定義と命題の境界

- この逆理はどこまでが定義で、どこからが命題なのか (Och)
 - － 定義とは、名称をつけるだけのことに等しい。
 - － 「”小さい数”を何個加えても”小さい数”である」における2つの”小さい数”は明らかに別の記号になると思う。

8.2 嘘付きの逆理 (The liar paradox)

L1 「この文は正しくない。」

- [1] 「この文は正しくない。」が正しいとする。
- [2] すると、この文は正しくない。
- [3] この文とは「この文は正しくない」である。
- [4] よって、「この文は正しくない」は正しくない。
- [5] 「この文は正しくない」が正しいとすると、正しくないことが示された。これは矛盾。
- [6] 背理法により「この文は正しくない」は正しくないことが示された。
- [7] すると、この文は正しくないわけではない。
- [8] すなわち、この文は正しい。
- [9] この文とは「この文は正しくない」という文である。
- [10] 従って「この文は正しくない」は正しい。
- [11] これは [6]) と矛盾。

ここで用いられている推論は次のようなことを用いている。

- [r-1] 文 P が正しいとは P であるということを意味する。
- [r-2] 文 P が正しくないの否定は、 P が正しいことを意味する。
- [r-3] P を仮定して P でないことが結論されるときは、 P ではないことが結論される。
- [r-4] 「この文」は「この文は正しくない」を指示する。
- [r-5] 指示代名詞が入った文の意味は、その代名詞をそれが指示するものに置き換えた文である。

問 1 規則 [r-4],[r-5] に問題はないか。

問 2 文 $L1$ は真か偽かを問う前に、そもそも意味があるのだろうか。

8.2.1 変種

L2 次の文は正しい。前の文は間違っている。

8.2.2 真理概念への懐疑

このパラドックスは「真理」という言葉の意味が明確さを失う状況を最も鮮明に例示するもので、§2.2 で述べた種々の真理論の背景をなす。

素朴にはこのパラドックスは次を示している

1. 「すべての」文の真理概念が明確に決まっているわけではない。

2. 「すべての」文の真理概念が明確に決まっている必要はない。
3. そもそも「すべての文」について何かを言うことができるはずがない。

状況 言明はそれが発せられた「状況」と切り離しては考えられない。

- 「小淵君はたばこを吸うのを止めた。」

もしも小淵君がたばこを吸ったことがないときには、この文が発せられることは有り得ない。実際にはそうではなく、たばこを吸い始めようとしている小淵君に警告として発したのかもしれない。

意図 現実には象がいなくて A 君が

- 「象が眠っている」

と言った場合には、それが正しいかどうかを、無意味かどうかを問題にする以前に、A 君の精神状態を疑うか、あるいは、何か象徴的なことを言っているのか、と戸惑うであろう。

言語ゲ - ム 論理学で扱う特殊な文を除けば、一般に使われている文の「真理条件」を探すのは無意味と思われる。むしろ、ある文が意味を持つ「言明可能条件」を探すことが有効である。しかし、言明可能条件には「これしかない」というような必然性はない。

8.2.3 タルスキ - の真理定理

タルスキ¹は、対象言語とメタ言語を区別しない限り、嘘つきパラドックスが生じて整合的な理論を望めないことを強調した。これは現代の数理論理学の基盤をなす考えである。

上で述べた「対象言語とメタ言語を区別しないと嘘付きパラドックスが生ずる」は、「数学的な定理に」表現できる。それは次のような議論で証明される。

まず述語について準備的説明をしておこう。

- (1) 一つの述語からは沢山の文（命題）を作ることができる。例えば「赤い」という述語は「この犬は赤い」「この本は赤い」等々の文が作れる（「述語 P は変数 x を含む命題「 x は P である」と同一視できる」などという。）
- (2) 述語は普通文字列で表現される。例えば赤いという述語は漢字「赤」と平仮名「い」の組み合わせ『赤い』を使って表現されている。そこで、文字が並んだものと見たときには太い括弧『』でくくって表現する²。

さて、ある言語において、その言語内の文が正しいことを規定する述語が存在するとしよう。これを使って、述語を表す文字列についての述語「自己否定的」を、

『 P 』は自己否定的である $\stackrel{def}{\iff}$ 「『 P 』は P である」は正しくない

¹ Alfred Tarski (1902-1983). ポーランド出身の数理論理学者。モデル理論の創始者。

² 文字列とそれが表す述語とを混同するとおかしいことになる。たとえば、「ソクラテスは人である。人は漢字である。ゆえに、ソクラテスは漢字である。」（この例は角田氏による）。さらに「ソクラテスはヒトである。ヒトはカタカナである。ゆえに、ソクラテスはカタカナである」という誤りもある（この例は武田氏による）。

と定義する．たとえば、「『赤い』は自己否定的だ」は、「『赤い』は赤くない」という正しいことを表す．しかし、「『7文字からなる』という述語は自己否定的ではない．実際に、文字列『7文字からなる』は7文字からなる．

さて、述語『自己否定的』は自己否定的だろうか．

「『自己否定的』は自己否定的である」は定義に戻れば、「『自己否定的』は自己否定的でない」ということを意味する．従って、「『自己否定的』は自己否定的である」という文は自分が正しくないことを主張する文、嘔吐き文になっている．

この矛盾を回避するため法として、タルスキ - は「正しい」という述語は、普通使っている言語の外にあると考えることにした．実際には「普通使っている言語」の一つのモデル化（1階の述語論理）を数学的に定義して、そこにおける真理概念は、集合論による解釈を通して超越的に定義することにしたのである．

8.2.4 ゲ - デルの不完全性定理

ゲ - デルは、嘔つきパラドックスの構造を使って「証明可能性」と「正しさ」との間に違いがあることを示した (1930)．証明可能ならば正しいが、正しくても証明できない命題を作れることを示した．その方法はタルスキ - の真理定理とほぼ同じである．しかし「証明」とは何かを明確にすることが、その後の計算機科学の基礎となるなど、形式体系についての精密な議論を提供した点で証明したことだけでなく、証明自体に含まれる数学的内容が豊かである．

8.3 宿題

次のパズルについて考察せよ．

Muddy Boys Puzzle

4人の天才児が外から教室に戻ってきました。一人を除いて、どの子の顔にも泥がついています。どの子もほかの子の顔が汚れているかどうかは見てわかるのですが、自分の顔がきれいかどうかはわかりません。そこに先生がやって来てみんなを見ると言いました：

(1)「顔に泥が付いたやつがいるぞ。」

そして、「よし、これから頭の体操をしよう。まず、みんな目をつぶって。」と
いってから

(2)「自分の顔が汚れているかどうかわかるものは手を挙げて！」

と言いました。そのあと、次のように問を繰り返しました：

- 手を挙げる子がいたら、「わかったやつがいるぞ！」と言ってから、質問(2)をする。
- 手を挙げる子がいなかったら、「なんだ、わかるやつはおらんのか。」と言ってから、質問(2)をする。

さて、子どもたちの応答はどのような経過を辿るでしょうか？