

6. 遷移系とプロセス 対象が関与するいくつかのイベントを選び、それを通してイベントを捉えようとするとき、最初に時系列の集まりとして対象は記述される。遷移系は、時系列集合を順序的規則性により記述するものである。時系列集合自身を遷移系として表現することは可能であるが、順序的規則性は最大自己双模倣同値関係として抽出できて、商遷移系として時系列集合の最小遷移系表現が得らる。

(6.1) 基礎概念.

(6.1.a) 定義. 集合 X, A と直積集合 $X \times A \times X$ の部分集合 τ との三つ組 (A, X, τ) を遷移系 (transition system) という。 $(x, a, y) \in \tau$ のとき、 $x \xrightarrow{a} y$ と書く。

集合 A の元をイベント、集合 X の元を、ここだけの用語であるが現状と呼ぶ。 $x \xrightarrow{a} y$ は、現状 x が a というイベントの発生と共に、 y という現状に遷移することを表す。イベントとしては、システムへの入力・システムからの出力・内部変化等を考えることができる。

遷移系 $\mathcal{T}$ と X の一つの元の組 $(\mathcal{T}, x)$ をプロセスと呼ぶ。

(6.1.b) 例 (i) 力学系

(6.1.b.i) 力学系 (X, τ) は、遷移系 $(\{\tau\}, X, T_\tau)$ とみることができる、ただし、

$$T_\tau := \{ (x, \tau, \tau(x)) \mid x \in X \}.$$

より一般に $A = \{\tau\}$ ならば、遷移系は非決定的力学系と考えることもできる。

(6.1.b.ii) また、力学系 (X, τ) と観測量 $f: X \rightarrow A$ があるとき、遷移系 $(A, X, T_{\tau, f})$ が得られる、ただし $T_{\tau, f} := \{ (x, f(x), \tau(x)) \mid x \in X \}$. この場合はイベント a はシステムを観測して a という観測値を得たことを表す。

(6.1.c) 例 (ii) オートマトン $\mathcal{M} = (X, A, O, \tau, \varpi)$ は遷移系 $(A \times O, X, T_{\mathcal{M}})$ を定める、ただし、 $T_{\mathcal{M}} := \{ (x, (a, \varpi(x, a)), \tau(x, a)) \mid x \in X, a \in A \}$. イベントは、システムへの入力と出力との組となる。

(6.2) プロセスと時系列集合.

(6.2.a) 時系列. A の有限列または無限列の全体を A^{**} と書く。空列を λ と書く。

遷移系から時系列系 遷移系 $\mathcal{T} = (A, X, T)$ と $x \in X$ に対して、時系列集合 $(A, R(\mathcal{T}, x)) \subset A^{**}$ が次のように定められる。無限列 $a_0 a_1 a_2 \cdots$ が $x \in X$ から始まる $\mathcal{T}$ のイベント系列であるとは、すべての自然数 i について $x_i \xrightarrow{a_i} x_{i+1}$ となるような $x_i \in X$ が存在することをいう、ただし $x_0 = x$ とおく。また、有限列 $a_0 a_1 a_2 \cdots a_m$ が $x \in X$ から始まる $\mathcal{T}$ のイベント系列であるとは、 $i < m$ について $x_i \xrightarrow{a_i} x_{i+1}$ となるような $x_i \in X$ が存在するが、 $x_m \xrightarrow{a} y$ となる a, y は存在しないことをいう。
 x から始まる $\mathcal{T}$ のイベント系列の全体を $H(\mathcal{T}, x)$ と書く。

(6.2.b) 時系列系から遷移系 時系列系 $S = (A, H)$ (すなわち $H \subset A^{**}$) から次のようにして、遷移系 $\mathcal{T}(S) = (A, X_H, T_H)$ が定義される：まず、 X_H の元は A の有限列からなっており、空列 λ であるか、または S の部分時系列である、ただし、 H に属する A -系列を有限のところまで切ってえられるものを、部分時系列という。 ξ も ξa も S の

部分時系列であるとき、 $\xi \xrightarrow{a} \xi a$ と定めることで T_H が定義される。(この遷移系は、グラフとしては λ を root とする木となっていて、各辺は唯一つのラベルを持つ。このような遷移系は synchronization tree と呼ばれることがある。)

あきらかに $(A, H(\lambda, \mathcal{T}(S))) = S$ となる。後で定義する、遷移系から最小遷移系を構成する方法適用すると、時系列系を記述する遷移系の中で最小なものがただ一つ存在することがわかる。

(6.3) 遷移系の射.

(6.3.a) 準同型 $\mathcal{T}_i = (A_i, X_i, T_i) (i = 1, 2)$ を遷移系とする。二つの写像 $f : A_1 \rightarrow A_2$ と $g : X_1 \rightarrow X_2$ が、「 $x \xrightarrow{a} y$ ならば $f(x) \xrightarrow{g(a)} f(y)$ 」という条件を満たしているとき、組 (f, g) を $\mathcal{T}_1$ から $\mathcal{T}_2$ への準同型と呼ぶ。このとき、 $a_0 a_1 a_2 \cdots$ を $f(a_0) f(a_1) f(a_2) \cdots$ に対応させる写像 $f_* : H(\mathcal{T}_1, x) \rightarrow H(\mathcal{T}_2, g(x))$ が定まる。

(6.3.b) 遷移系の模倣的準同型. $\mathcal{T}_i = (A_i, X_i, T_i) (i = 1, 2)$ を遷移系とする。準同型 (f, g) は次の性質を満たすとき模倣的であるという：「 $g(x_1) \xrightarrow{a_2} y_2$ ならば $g(y_1) = y_2$, $f(a_1) = a_2$ かつ $x_1 \xrightarrow{a_1} y_1$ となる $y_1 \in X_1$ と $a_1 \in A_1$ が存在する。」

一般の準同型については $f_* \mathcal{H}(\mathcal{T}_1, x) \subset \mathcal{H}(\mathcal{T}_2, g(x))$ しか成り立たないが、模倣的準同型があるときは、明らかに $f_* \mathcal{H}(x, \mathcal{T}_1) = \mathcal{H}(g(x), \mathcal{T}_2)$ が成り立つ。とくに、 $f = \text{id}$ ならば、挙動を見ているだけでは、模倣的準同型な遷移系は区別できないことになる。

(6.3.c) 遷移系の双模倣対応 遷移系 $\mathcal{T}_i = (A, X_i, T_i) (i = 1, 2)$ に対して、 $X_i (i = 1, 2)$ の間の関係 $R \subset X_1 \times X_2$ が次の条件を満たすとき、 $\mathcal{T}_i (i = 1, 2)$ の間の双模倣対応であるという：すべての $(x_1, x_2) \in R$ に対して、

- $x_1 \xrightarrow{a} y_1$ ならば、 $x_2 \xrightarrow{a} y_2$ かつ $(y_1, y_2) \in R$ となる $y_2 \in X_2$ がある。
- $x_2 \xrightarrow{a} y_2$ ならば、 $x_1 \xrightarrow{a} y_1$ かつ $(y_1, y_2) \in R$ となる $y_1 \in X_1$ がある。

(6.4) 定理. $(x_1, x_2) \in R$ となる双模倣対応 R が存在するための必要十分な条件は

$$\mathcal{H}(\mathcal{T}_1, x_1) = \mathcal{H}(\mathcal{T}_2, x_2)$$

となることである。

(6.5) 最小遷移系 双模倣関係の全体は和で閉じているので、2つの遷移系の間には最大の双模倣関係が存在する。これを $R(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ と書く。(p3.2 の (2.2) の内容と実質的には同じ。)

双模倣という性質は、関係の合成・逆に関して保たれるので、遷移系 $\mathcal{T} = (A, X, T)$ と自分自身との最大双模倣関係は X 上の同値関係となる。その同値類集合を $\bar{X}$ とおくと、

$$[x] \xrightarrow{a} [y] \iff x \xrightarrow{a} y$$

と定めることにより遷移系 $\bar{\mathcal{T}} := (A, \bar{X}, \bar{T})$ が定義される。商写像 $x \mapsto [x]$ は模倣的準同型 $\mathcal{T} \rightarrow \bar{\mathcal{T}}$ を定めるので、すべての $x \in X$ に対して

$$\mathcal{H}(\mathcal{T}, x) = \mathcal{H}(\bar{\mathcal{T}}, [x])$$

となる。 $\bar{\mathcal{T}}$ は $\mathcal{T}$ との間に双模倣関係を持つ遷移系の中で「サイズ」が最小のものとして同型を除いて特徴付けられる (Myhill-Nerode の定理の一種)。 $\bar{\mathcal{T}}$ は自分自身との間の最大双模倣関係が対角線集合となっているが。このような遷移系を最小遷移系と呼ぶ。双模倣同値類は同型を除いてただ一つの最小遷移系を含むので、最小遷移系は遷移系の標準系として利用できる。

(6.6) プロセスの演算 $\mathcal{T} = (A, X, T)$, $\mathcal{T}_i = (A_i, X_i, T_i)$ ($i = 1, 2$) を遷移系とする。以下用いる x_0 という記号は、それが使われる前にでてきてはいない何かをあらわすことにする。

(6.6.a) 前置 $a \in A$ に対して

$$a.(\mathcal{T}, x) := ((A, X \cup \{x_0\}, T \cup \{(x_0, a, x)\}), x_0)$$

(6.6.b) 選択

$$(\mathcal{T}_1, x_1) + (\mathcal{T}_2, x_2) := ((A_1 \cup A_2, X_1 \amalg X_2 \cup \{x_0\}, T'), x_0)$$

ただし、 $(x_i, a, y) \in T_i$ ($i = 1$ または $i = 2$) であるような (x_0, a, y) を T につけ加えたものが T' である。

(6.6.c) 並列積

$$(\mathcal{T}_1, x_1) || (\mathcal{T}_2, x_2) := (\mathcal{T}_1 || \mathcal{T}_2, (x_1, x_2)).$$

ここで

$$\mathcal{T}_1 || \mathcal{T}_2 = (A_1 \cup A_2, X_1 \times X_2, T_{12}).$$

ただし、 T_{12} は、次のいずれかが成り立つような a, x_i, y_i ($i = 1, 2$) からつくられる 3 組 $((x_1, x_2), a, (y_1, y_2))$ の全体とする。

- $a \in A_1 \setminus A_2$ かつ $x_1 \xrightarrow{a} y_1, x_2 = y_2$,
- $a \in A_2 \setminus A_1$ かつ $x_1 = y_1, x_2 \xrightarrow{a} y_2$,
- $a \in A_1 \cap A_2$ かつ $x_1 \xrightarrow{a} y_1, x_2 \xrightarrow{a} y_2$.

(6.6.d) イベントの変換 f を A から別の集合 A' への写像で、 τ を保つとする。このとき、 $(\mathcal{T}, x)[f] := ((A', X, T'), x)$ が

$$T' := \{ (x, f(a), y) \mid (x, a, y) \in T \}$$

により定義される。

(6.6.e) イベントの隠ぺい A の部分集合 B で τ を含まないものに対して、

$$(\mathcal{T}, x) \setminus B := (\mathcal{T}, x)[f].$$

ただし、 $f: A \rightarrow A \setminus B$ を $x \notin B$ に対しては $f(x) = x$, $x \in B$ に対しては $f(x) = \tau$ と定める。

(6.7) プロセス演算の時系列表現

(6.7.a) $H(a.\mathcal{P}) = a.H(\mathcal{P})$

(6.7.b) $H(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = H(\mathcal{P}_1) \cup H(\text{cal}\mathcal{P}_2)$

(6.7.c) $H(\mathcal{P}_1 || \mathcal{P}_2) = H(\mathcal{P}_1) || H(\mathcal{P}_2)$ ただし、 $H(\mathcal{P}_1) || H(\mathcal{P}_2)$ は $(A_1 \cup A_2)^{**}$ の元 ξ で、その中の A_i に属する部分だけを取り出すと $H(\mathcal{P}_i)$ に属するようなものの全体を表す。これを $H(\mathcal{P}_i)$ ($i = 1, 2$) のインターリーブ合成という。

(6.7.d) $H(\mathcal{P}[f]) = f_*H(\mathcal{P})$

(6.8) まとめ.

- (6.8.a) 遷移系は、数学的にはラベル付き有向グラフに他ならない。遷移系と印（任意に選ばれた一つの頂点）の組をプロセスと呼ぶ（印は現在の「状態」を表す）。従って一つの遷移系は頂点の数だけ多くのプロセスを生ずる。
- (6.8.b) プロセス $P = (\mathcal{T}, p)$ は時系列集合 $\mathcal{H}(P)$ を定める。
- しかし、これは多対1である
 - $\mathcal{H}(\mathcal{T}, p) = \mathcal{H}$ となる最小の $(\mathcal{T}, p)$ がある。（これは非有基的集合としても捉えられる。）
 - プロセスの同値性を双模倣同値関係で定める。
 - しかし、双模倣同値の概念には種々の定義があり、目的に応じて適切さが異なる。（同期系では強双模倣（これは非決定的力学系に対して (2.2) 節で導入したものに対応）、非同期系では弱双模倣が標準的な定義となる。）
- (6.8.c) 演算が豊富（ $\implies$ プロセスをモデルとする種々のプロセス代数が構成される。）
- 新挙動の自由な生成： $a.P$,
 - 選択合成（非決定性）： $P + Q$,
 - 並列合成（その両極端として同期合成 / インターリーブ合成） $P \parallel Q$
 - 多様な再帰性の表現 $\mu_X P$ （「プロセス方程式は唯一つの解を持つ」）
- (6.8.d) イベントの再分類に対応して遷移系は変換される： $P \mapsto P[\rho]$
- 特に、いくつかのイベントの隠ぺいに対応して τ -動作（外部に影響を与えず、また外部から影響を受けないすべての内部動作を表す）が生じる。
 - τ -動作の回数が問題とはしないことにより弱双模倣の概念が生じる。
- (6.8.e) 遷移系の制約。 遷移系は、対象の空間的構造を直接には表現できない。
- インターリーブにより生ずる見かけの非決定性と、選択合成により生ずる非決定性とは、皮相的には区別できない。
 - プロセス代数では $P \parallel Q$ という演算が空間的構造をある程度表現するが、遷移系ではこれは表面上は現れない。
- (6.8.f) まとめ。 遷移系によるプロセスの定式化は、時系列による表現よりはやや抽象度が高いが、「還元主義的」役割を持つ：様々な高次のプロセスについての考察は、とりあえずは遷移系のことばで表現できるが、遷移系の枠組自身にはその考察を適切に表現する手段はない。

参考文献

[WN] Winskel, Glynn and Nielsen, Mogens. Models for concurrency.

[M] Milnor, A.R.G.. Communication and concurrency. Prentice Hall, 1989.