9. Hypercategory

分散系において、各要素の同一時刻の状態を並べた情報、いわゆる snapshot は、系を記述するものとしては意義が薄い。むしろ、諸要素間の関係記述の方が、系の理解に適切なレベルの情報を与えると考えられる。諸要素間の関係は動いている場合には、要素間関係は分散系の「状態」と考えることもできる。

成分間関係の詳細は錯綜していて簡潔な記述を望むべくもない。成分間の結合状況の情報は、粗いレベルの手がかりに過ぎないが、分散系を捉える適切なレベルの記述の一つと考えられる。

以下述べる hypercategory の枠組みは、このレベルの分散系記述を与えると思われる。

hypercategory は *-autonomous category[1] とほぼ同等と思われる初等的な数学的枠組である。hypercategory · 古典線形論理 · 相互作用系との関係は、標語的に

hypercategory	...	射	:	対象	:	対象演算
古典線形論理	...	証明	:	命題	:	論理演算
相互作用系	...	プロセス	:	インターフェース	:	修飾

と表されよう。

polycategory[2] では、インターフェースが入力型と出力型とに分類されていることにより多重カット（インターフェースの多重同時結合）が許されるのに反し、hypercategory では、単独カット（インターフェースの単独結合）しか許されない、それは、インターフェース結合による相互作用が双方向であると想定する場合、多重カットはシステムの凍結をもたらす可能性があるからである。インタフェースの独立・従属情報をマトロイド概念を用いて付加することにより、多重カットを条件付きで許すようにすることもできる。

hypercategory に対象演算を導入することで、インターフェースの修飾を表現できる。どの hypercategory にも、線形論理演算に対応する対象演算が自然に導入される。もとの hypercagetory は拡張した hypercategory に忠実に埋め込まれると思われるので、線形論理演算により新しい射の合成が生じる訳ではないが、これらの演算による射の「前処理」を通して、他の射とのカット（合成）の仕方を詳細に処方することが可能となるのである。

(9.1) **定義**　$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ は次の条件を満たすとき *hypercategory* であるという。

H1 $\mathcal{H}_0$ は**対象**の集まりで、involution τ を持つ。$\overline{a} := \tau a$ と書く。

H2 $\mathcal{H}_1$ は**射**の集まりで、各射には interface と呼ばれるものが有限個付随している。各 interface は対象を型として持つ。対象 φ の interface の集合を $\partial\varphi$ と書き、interface $\alpha \in \partial\varphi$ の型を $[\alpha]$ と書く。
$\partial\varphi = N_m := \{\, 1, 2, \cdots, m \,\}$ のときは、

$$\phi \models [1], [2], \cdots, [m]$$

と書く。

H3 射 φ と、全単射 $\sigma : \partial\varphi \to Y$ に対して、次のような射 $\sigma.\varphi$ が存在する

- $\partial(\sigma.\varphi) = Y$,
- $[\sigma\alpha] = [\alpha] \quad$ for all $\alpha \in \partial\varphi$.

さらに、

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\partial\varphi}.\varphi &= \varphi \\ \sigma.(\tau.\varphi) &= (\sigma\tau).\varphi \end{aligned}$$

が成り立つ。

H4 各対象 a に対して、$\partial 1_a = \{ a, \overline{a} \}$, $[a] = a, [\overline{a}] = \overline{a}$ を満たす射 1_a が存在し、$1_a = 1_{\overline{a}}$ を満たす。

H5 2つの射 φ, ψ と各々の interface i, j で $\overline{[i]} = [j]$ を満たすものに対して cut と呼ばれる射 $\mathrm{Cut}_{i,j}(\varphi, \psi)$ が存在して

$$\partial \mathrm{Cut}_{i,j}(\varphi, \psi) = \partial\varphi \setminus \{ i \} \coprod \partial\psi \setminus \{ j \}$$

を満たし、タイプはもとのタイプを継承する。

これは次の４つの性質を持つ。

H6 可換である：

$$\sigma.\mathrm{Cut}_{i,j}(\varphi, \psi) = \mathrm{Cut}_{j,i}(\psi, \varphi),$$

ただし σ は直和の因子を入れ換える全単射

$$\sigma : \partial\varphi \setminus \{ i \} \coprod \partial\psi \setminus \{ j \} \longrightarrow \partial\psi \setminus \{ j \} \coprod \partial\varphi \setminus \{ i \}.$$

H7 2つの射 φ, ψ と全単射 $\sigma : \partial\varphi \to X, \quad \tau : \partial\psi \to Y$ に対して

$$\left(\sigma|_{\partial\setminus\{ i \}} \times \tau|_{\partial\setminus\{ j \}}\right).\mathrm{Cut}_{i,j}(\varphi, \psi) = \mathrm{Cut}_{\sigma i, \tau j}(\sigma.\varphi, \tau.\psi),$$

H8 恒等射の性質 $\quad i \in \partial\varphi$, $[i] = a$ のとき

$$\sigma.\mathrm{Cut}_{i,a}(\varphi, 1_a) = \varphi$$

ただし、

$$\sigma : \partial\varphi \setminus \{ i \} \coprod \{ a \} \to \partial\varphi$$

は、$\sigma(j) := j \quad (j \neq i)$, $\sigma(a) := i$ で定義される全単射。

H9 結合法則 $\quad i \in \partial\varphi_1$, $j, k \in \partial\varphi_2 \quad (j \neq k)$, $\ell \in \partial\varphi_3$ かつ、$\overline{[i]} = [j]$, $\overline{[k]} = [\ell]$ のとき、

$$f.\mathrm{Cut}_{k,\ell}\left(\mathrm{Cut}_{i,j}(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_3\right) = \mathrm{Cut}_{i,j}\left(\varphi_1, \mathrm{Cut}_{k,\ell}(\varphi_2, \varphi_3)\right)$$

ただし、f は次のような自然な全単射。

$$f : \left(\partial\varphi_1 \setminus \{ i \} \coprod \partial\varphi_2 \setminus \{ j \}\right) \setminus \{ k \} \coprod \partial\varphi_3 \setminus \{ \ell \} \longrightarrow \partial\varphi_1 \setminus \{ i \} \coprod \left(\partial\varphi_2 \setminus \{ k \} \coprod \partial\varphi_3 \setminus \{ \ell \}\right) \setminus \{ j \}$$

(9.2) thin hypercategory $\qquad$ どのような型の列 $a_1, \cdots, a_m$ に対しても $\varphi \models a_1, \cdots, a_m$ となる射 φ が高々一つであるとき、hypercategory は **thin** であるという。

(9.3) **説明**　射の interface にはラベルが与えられているが、そのラベルは各 interface をを特定するだけの役割しか果たさない (H3,H6,H7)。

射を図示すれば interface は場所によって特定できるので、名前は必要なくなり、射についての諸命題が簡潔に表現される。

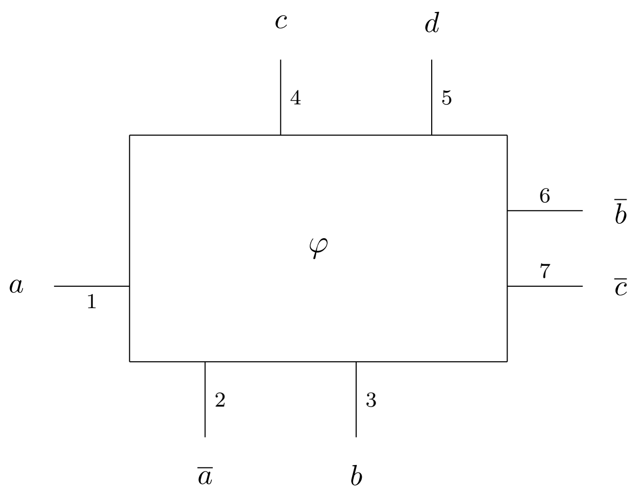
射を以下のように図示する。

(9.3.a) 射は単純閉曲線で囲まれた図形で表し、名前を内部に書く。

(9.3.b) interface ごとに線を外部に書く。interface i に対して

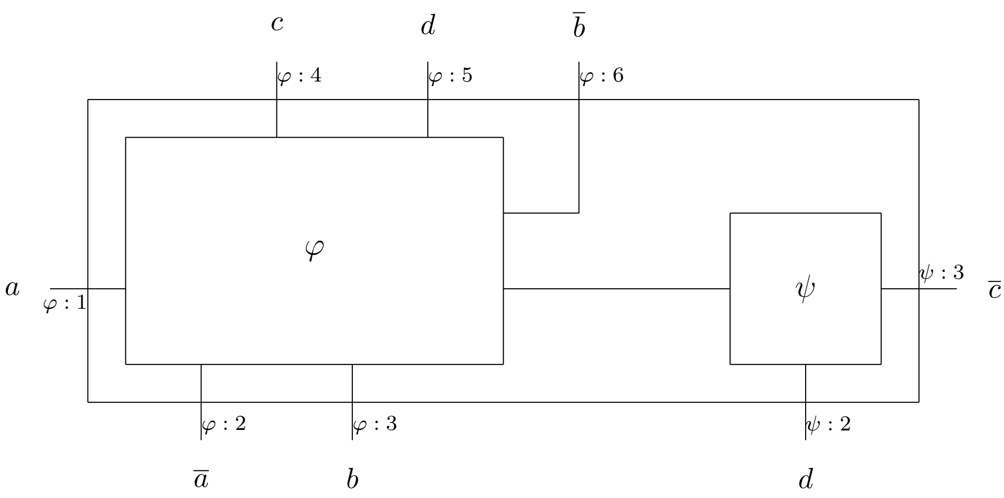
- 線にラベル i を書く。
- 線の先に $[i]$ を書く。

例えば、$\varphi \models a, \overline{a}, b, c, d, \overline{b}, \overline{c}$ のとき（すなわち、$\partial\varphi = \{\,1,2,3,4,5,6,7\,\},\ [1] = a, [2] = \overline{a}, [3] = b, \cdots$ のとき、）



cut による結合は、2 つの射を含む単一閉曲線を描き、cut する　interface の線は内部で結び、残りの線は外部まで延ばし、もとの型を外に書く。図示では、各 interface の由来は明かであるが、図形を変形する場合には interface の identity を明確にする為に、内部のラベルの前に射の名前を : を付したラベル（例えば $\varphi : 1$ など）を書く。

例えば $\psi \models c, d, \overline{c}$ のとき、$\mathrm{Cut}_{7,1}(\varphi, \psi)$ は次のように図示する：



同じ射を cut する場合（e.g. $\mathrm{Cut}(\varphi, \varphi)$ など）は、射の名前の右肩に番号を振り区別する (φ^1, φ^2)。

結合律により、どの順に interface をつないでも同じ射が得られることになる。

(9.4) **例**

(9.4.a) 命題論理式の論理同値類を対象、$\overline{p} := \neg p$ とし、

$$\models p_1, \cdots, p_m \iff p_1 \vee \cdots \vee p_m \text{ はトートロジー}$$

と定め、cut は通常の cut

$$\models \Gamma, p, \models \Delta, \neg p \Rightarrow \models \Gamma, \Delta$$

とすると thin hypercategory となる。

(9.4.b) 集合 A の元を対象とし、$\overline{a} = a$ とする。射はサイクルのない対称グラフ 、その interface はその葉の全体、そして、各葉に A の元が型として対応付けられているとする。同じ型の 2 つの葉をつなぐ操作により cut が定義される。この操作で出来るグラフもサイクルを持たないことは明らか。

(9.4.c) 対象はただ一つとする。有限集合 B に対して、体 K 上の線形空間 K^B の部分空間であって、どの射影 $\pi_b : K^B \to K$ によっても K 全体に写されるようなもの φ を射とする。$\partial\varphi := B$ と定義する。$\partial\varphi_i = B_i$ $(i = 1,\ 2)$ とするとき、

$$\mathrm{Cut}_{b_1,b_2}(\varphi_1, \varphi_2) := \{\ \delta_{b_1}\mathbf{x} \times \delta_{b_2}\mathbf{y} \mid \exists k \in K\,[\mathbf{x}[k/x_{b_1}] \in \varphi_1, \mathbf{y}[k/y_{b_2}] \in \varphi_2]\ \}$$

ただし、$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, $\delta_b\mathbf{x}$ は b 成分を除いたベクトルを表し、$\mathbf{x}[k/x_b]$ は $\mathbf{x}$ の b 成分を k で置き直したベクトルを表す。

参考文献

[1] Barr, M.,*-Autonomous categories and linear logic. Mathematical Structures in Computer Science, 1:159–178, 1991. (`ftp://triples.math.mcgill.ca/pub/barr/staracll.tex`)

[2] Cockett, J.R.B. and Seely, R.A.G.,Weakly distributive categories. In Applications of Categories in Computer Science, London Mathematical Society Lecture Note Series 177, (ed. Fourman, M.P. et al), 45–65, 1992.
(`ftp://triples.math.mcgill.ca/pub/rags/wk_dist_cat/wdc.ps.gz`)