1995 年度後期 応用数学 1

動的システムとしての複雑系記述 資料 Ver 1.5

[1] 本講義のねらい：複雑系は単一の数学的形式化を拒むが、多様な数学的形式による表現は複雑系の理解を進めることが期待される。従って、複雑系の数学的基礎研究の最初の課題の一つは、複雑系のさまざまな側面を記述する数学的枠組を模索・開発・整備することにある。

この講義では、動的システムとしての複雑系の数学的諸記述法を主題として取り上げる。従来の力学系的記述系の基礎概念をカテゴリー理論の枠組みから整理するとともに、力学系的な枠組よりも抽象度の高い枠組みとして提唱されているものをいくつか概観し、複雑系の非同期的な側面の数学的記述法の一つの枠組みとしてハイパーカテゴリーの概要を述べる。

[2] 予備知識：初等的集合論（数学概論程度）・カテゴリーの基礎事項。これ以外で必要な知識は丁寧に説明したい。

[3] テーマ（予定）

(a) カテゴリー理論からの準備

(b) 既約プロセス

- 力学系のカテゴリー
- 非決定的力学系のカテゴリー
- 決定的オートマトンのカテゴリー

(c) 多成分同期システム

- オートマトンの複合系（チューリング機械）
- セルオートマトン・神経回路網
- deductive hyperdigraph （多成分システムの相関記述法）

(d) 非同期システム

- 遷移系・プロセス
- Petri net
- Chemical abstract machine

(e) 相互作用記述

- Action structure & action calculus

- π算法の Action structure による実現
- ハイパーカテゴリー

[4] オンライン情報:URL:"`http//math.hokudai.ac.jp/~tujisita/fcs-home.html`"

0. カテゴリーの基礎概念

(0.1) カテゴリー $\mathcal{C}$

- 対象 (object), $\mathcal{C}_0$:object の全体
- 射 (arrow) $a \stackrel{f}{\to} b$, $a = d_0(f), b = d_1(f)$
  $\mathcal{C}(a,b) := \{\ f \mid a \stackrel{f}{\to} b\ \}$
  $\mathcal{C}_1 := \coprod_{a,b} \mathcal{C}(a,b)$

(0.2) **dual category** $\mathcal{C}^{op}$ の対象は、$\mathcal{C}$ の対象であり、$\mathcal{C}^{op}(X,Y) := \mathcal{C}(Y,X)$.
$\mathcal{C}$ の射 $X \stackrel{f}{\to} Y$ を $\mathcal{C}^{op}$ の射とみたものを $\overline{f}$ と書くとき、$\overline{f} \circ \overline{g} := \overline{g \circ f}$.

(0.3) functor, natural transformation

- 対 $F_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{D}_i (i = 0,1)$ が 次の条件を満たすとき、$F = (F_0, F_1)$ を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への functor であるという。$F_i x$ はしばしば Fx と略記する。
  - $d_i F_1(f) = F_0(d_i f) \quad (i = 0,1)$ すなわち $X \stackrel{f}{\to} Y$ ならば $F_0(X) \stackrel{F_1(f)}{\to} F_0(Y)$,
  - $F(1_X) = 1_{F(X)}$,
  - $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ すなわち

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

が可換ならば、

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, "F(g)"] & \\ F(Y) \arrow[r, "F(h)"'] & F(Z) \end{tikzcd}$$

も可換である。

- functors $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して族 $\alpha = \{\ FX \stackrel{\alpha(X)}{\to} GX \mid X \in \mathcal{C}_0\ \}$ が natural transformation $F \to G$ であるとは、任意の arrow $X \stackrel{f}{\to} Y$ に対して $\alpha(Y) \circ F(f) = G(f) \circ \alpha(X)$ を満たすこと、すなわち次の図が可換であることをいう。

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha(X)"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha(Y)"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd} .$$

(0.4) 同型 (isomorphism): 射 $X \overset{f}{\to} Y$ が同型であるとは、次の条件を満たす射 $Y \overset{g}{\to} X$ が存在することをいう：$f \circ g = 1_Y$, $g \circ f = 1_X$.

(0.5) 単射 (monic):$X \overset{f}{\to} Y$ が monic であるとは, 任意の２つの射 $g, h : A \to X$ について、$f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$ となることをいう。X を codomain とする２つの monic $A_i \overset{f_i}{\to} X$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、次の図が可換となう同型 $g : A_1 \overset{\cong}{\to} A_2$ が存在するとき、f_1 と f_2 とは同値であるという：

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, tail, "f_1"] & \\ & X \\ A_2 \arrow[ur, tail, "f_2"'] & \end{tikzcd} .$$

X を codomain とする monic の同値類を X の subobject といい、その全体を $\mathrm{Sub}(X)$ と書く。

カテゴリー $\mathcal{C}$ が pull-back を持つときは、$X \mapsto \mathrm{Sub}(X)$ は functor $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{S}\mathbf{et}$ になる：$X \overset{f}{\to} Y$ と mono $B \overset{\iota}{\to} Y$ に対して、次の pull-back における κ は mono となるから、$\mathrm{Sub}(f) : \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ を $\mathrm{Sub}(f)([\iota]) := [\kappa]$ により定義できる：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\kappa"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, tail, "\iota"'] & Y \end{tikzcd}$$

(0.6) 全射 (epics): monics の dual な概念。

(0.7) 積 (product)$X \times Y$・余積 (coproduct)$X + Y$

(0.8) 始対象 (initial object)$\mathbf{0}$

(0.9) 終対象 (final object)$\mathbf{1}$：どの対象 X に対しても、只一つの射 $X \to \mathbf{1}$ がある。この射を $!_x$ または、単に ! と書く。

(0.10) べき対象 (exponential)：積を持つカテゴリー　$\mathcal{C}$ において、

$$\theta_{X,Y} : \mathcal{C}(\bullet \times X, Y) \simeq \mathcal{C}(\bullet, [X,Y])$$

となる全単射があり、X, Y について自然であるとき、$[X,Y]$ をべき対象という。Y^X と書くことも多い。$\bullet = [X,Y]$ の場合に、$\mathrm{id}_{[X,Y]}$ に対応するものを　$ev : [X,Y] \times X \to Y$ と書く。$F : Z \times X \to Y \overset{\theta}{\mapsto} f : Z \to [X,Y]$ のとき $F = ev \circ (f \times 1_X)$ となる。

(0.11) 終対象・積・べき対象を持つカテゴリーを **cartesian closed category** (CCC と略す)

(0.12) subobject classifier: $(\Omega, \top : \mathbf{1} \to \Omega)$　　任意の monic $f : A \to X$ に対して、次の図が pull-back となるような射 $\chi_f : X \to \Omega$ が唯一つ存在する：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\chi_f"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

(0.13) topos の定義の仕方はいろいろある。次のものが、具体的なカテゴリーが topos であることを確かめるのに便利である：カテゴリー $\mathcal{C}$ が **elementary topos**(以下単に topos) であるとは

(a) 終対象と積を持つ。

(b) subobject classifier を持つ。

(c) 各対象 X はべき対象 PX を持つ。すなわち、対象 PX と射

$$X \times PX \overset{\epsilon_X}{\to} \Omega$$

が存在して、$F : A \to PX$ に対して、$\chi_F : X \times A \to \Omega$ を、

$$[X \times A‘X \times PX‘\Omega; 1 \times F‘\chi_F‘\epsilon_X]$$

が可換になるように定義するとき、$F \mapsto \chi_F$ は全単射

$$\mathcal{C}(X \times A, \Omega) \simeq \mathcal{C}(A, PX)$$

を与える。

(0.14) topos の基本的性質

(a) topos は CCC である。

(b) topos は finite complete, とくに、pull-back,equalizer が存在する

(c) topos では monic かつ epic であれば同型となる。

(d) topos は finite cocomplete, とくに、始対象・和・coequalizer・push out などを持つ。

(e) topos では、集合論的な議論が正当化される。この主張に正確な意味を与えるには internal language と呼ばれる形式系を導入する必要がある。[B] ではこのことをまず示した後、topos の多くの性質を、集合論の場合の議論を形式化することにより、簡潔に導いている。

(0.15) 参考書

[M] C. McLarty: Elementary Categories, Elementary Toposes. Oxford Logic Guides **21**, Clarendon Press, Oxford 1995.

[B] J.L. Bell: Toposes and Local Set Theories. Oxford Logic Guides **14**, Clarendon Press, Oxford 1988.

[LS] F.W.Lawvere and S.H.Schanuel:Conceptual Mathematics–A first introduction to categories, Buffalo Workshop Press 1993, ISBN 0–9631805–1–7. (カテゴリーの入門書であるが、力学系のカテゴリーの解説にかなりのページを割いており、最後の章ではトポスの概念が導入されている。Lawvere はトポス (elementary topos) の概念の創始者であるとともにカテゴリー理論の発展の道筋を作り続けている人)

1995 年度応用数学 1 動的システムとしての複雑系記述　第 2 回資料 Ver 1.2　1995.10.16, revised 10.30

---

1. 力学系のカテゴリー

(1.1) 力学系の基礎概念

(1.1.a) 記号

- $T := \{ n \mid n$ は非負整数 $\}$
- $(X \to Y) = \{ f \mid f : X \to Y \}$ (X, Y:集合、f:写像)

(1.1.b) $D = (\mathcal{S}, \tau)$ が力学系 $\iff$ $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ は写像（$\mathcal{S}$:状態空間、τ:状態遷移写像）。
$|D| := \mathcal{S}$ と書く。

(1.1.c) $\mathbf{x} \in (T \to \mathcal{S})$ が D の軌道 $\iff$ $\tau(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t+1) \forall t \in T.$
$\mathbf{x}$ を $(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \cdots)$ とも書く。

(1.1.d) $\mathrm{Orbit}(D) := \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}$ は D の軌道 $\}$
$\omega(x) := (x, \tau(x), \tau^2(x), \cdots, \tau^n(x), \cdots) \in \mathrm{Orbit}(D)$ $(x \in \mathcal{S})$

(1.1.e) 力学系の有向グラフ：$\Gamma(D) := (\mathcal{S}, E := \{ (x, \tau(x) \mid x \in \mathcal{S} \})$

(1.2) 力学系のカテゴリー

(1.2.a) 力学系のカテゴリー： $\mathcal{D}\mathbf{yn}$

- 対象：力学系
- 射：力学系の準同型 $\varphi : D_1 \to D_2$ $\iff$ $|\varphi| : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ s.t. $\tau_2 \circ |\varphi| = |\varphi| \circ \tau_1.$
- $\mathcal{D}\mathbf{yn}(D_1, D_2) := \{ \varphi : D_1 \to D_2$:射 $\}$
- 注意： $\mathcal{N} = (T, \bullet + 1)$ のとき、$\mathcal{D}\mathbf{yn}(\mathcal{N}, D) = \mathrm{Orbit}(D),$
従って、$\varphi : D_1 \to D_2$ は $\mathcal{D}\mathbf{yn}(\mathcal{N}, D_1) \to \mathcal{D}\mathbf{yn}(\mathcal{N}, D_2)$, すなわち $\varphi_* : \mathrm{Orbit}(D_1) \to \mathrm{Orbit}(D_2) :$
を引き起こす。

(1.2.b) functor $F : \mathcal{S}\mathbf{et} \to \mathcal{S}\mathbf{et}$ は functor $F : \mathcal{D}\mathbf{yn} \to \mathcal{D}\mathbf{yn}$ を引き起こす。例：

i. $\mathbf{pow}$ (D): $\{ x, y, \cdots \} \mapsto \{ \tau x, \tau y, \cdots \}.$
ii. $\mathrm{Map}(I, D)$ $(\tau(\varphi)(i) := \tau(\varphi(i)))$
iii. $\mathrm{Map}(D, I)$ $(\tau(\varphi)(x) := \varphi(\tau(x)))$

練習問題 $\mathbf{pow}\ D, \mathrm{Map}(D, \{ 0, 1 \})$ とを比較せよ。

(1.3) $\mathcal{D}\mathbf{yn}$ は CCC である

(1.3.a) 初対象：$(\emptyset, \emptyset)$,

(1.3.b) 終対象：$\mathbf{1} := (\{ * \}, \mathrm{id})$,
$\mathcal{D}\mathbf{yn}(\mathbf{1}, D) = \{ D$ の固定点 $\}$

(1.3.c) 積：$D_1 \times D_2 := (\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2, \tau_1 \times \tau_2)$
$\mathcal{N} \times D$ は D の suspension

(1.3.d) 和：$D_1 + D_2 := (\mathcal{S}_1 \coprod \mathcal{S}_2, \tau_1 \coprod \tau_2)$,
D が、initial ではない２つの力学系の和と同型であるとき、可約（reducible）であるという。可約でない力学系を既約 (irreducible) であるという。

(1.3.e) 射対象：$[D_1, D_2] := (\mathcal{D}\mathbf{yn}(\mathcal{N} \times D_1, D_2), \tilde{\tau})$ $\tilde{\tau}(\varphi)(m, x) = \varphi(m+1, x)$
$[D_1, D_2]$ の固定点と D_1 から D_2 への射とが 1 対 1 に対応する。

(1.3.f) 随伴 (adjunction) $\bullet \times D \dashv [D, \bullet]$
$\psi : D_1 \times D_2 \to D_3$ に対して、$\tilde{\psi} : D_1 \to [D_2, D_3]$ を $\tilde{\psi}(x_1)(m, x_2) := \psi(\tau_1^m x_1, x_2)$ と定めると、同型：$\mathcal{D}\mathbf{yn}(D_1 \times D_2, D_3) \simeq \mathcal{D}\mathbf{yn}(D_1, [D_2, D_3])$ を得る。

(1.4) $\mathcal{D}\mathbf{yn}$ は topos である

(1.4.a) 分類対象 Ω

i. $\Omega = (\{ n \in \mathbf{Z} \mid n \leq 0 \} \bigcup \{ -\infty \}, \tau_\Omega)$ $(\tau_\Omega : 0 \mapsto 0, \quad n \mapsto n+1, \quad -\infty \mapsto -\infty)$

ii. $\top : \mathbf{1} \to \Omega \quad (\top(*) := 0)$.

iii. monic $\varphi : D_1 \to D$ (i.e. $\varphi(\mathcal{S}_1) \subset \mathcal{S}$ は不変部分集合) の特性射：
$\chi_\varphi : D \to \Omega$, $\chi_\varphi(x) := -\min \{ t \in T \mid \tau^t x \in \varphi(\mathcal{S}_1) \}$ $(\min \emptyset := \infty)$

注意 Ω の状態集合は無限集合であることから、有限力学系のカテゴリーはトポスをなさないことがわかる。実は CCC でもないことがわかる（練習問題)。

iv. 練習問題 Ω の部分対象をすべて求めよ。すなわち、$\mathcal{D}\mathbf{yn}(\Omega, \Omega)$ をすべて求めよ。

(1.4.b) 分類対象の構造

i. $|\Omega|$ 上の順序　$\preceq$：$\mathbf{Z}$ 上では普通の大小関係, $-\infty$ は最小元とする。

ii. $\mathcal{D}\mathbf{yn}(\mathbf{1}, \Omega) = \{ \top, \bot \}$, ただし、$\bot(*) = -\infty$.

iii. mono $< \top, \top >: \mathbf{1} \to \Omega \times \Omega$ の特性写像 $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$
$(\alpha, \beta) \mapsto \min(\alpha, \beta)$

iv. mono $\leq_1 \to \Omega \times \Omega$ を $\wedge, pr_1 : \Omega \times \Omega \to \Omega$ の equalizer とすると、

$$\leq_1 := \{ \alpha, \beta \mid \alpha \preceq \beta \}$$

v. $\leq_1$ の特性写像 $\to : \Omega \times \Omega \to \Omega$:

$$\alpha \to \beta = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \preceq \beta \\ \beta & \text{if } \alpha \succ \beta \end{cases}$$

vi. $\neg : \Omega \to \Omega$: $\neg\alpha := \alpha \to -\infty$ すなわち、

$$\neg\alpha = \begin{cases} -\infty & \text{if } \alpha \neq -\infty \\ 0 & \text{if } \alpha = -\infty \end{cases}$$

これより

$$\neg\neg\alpha = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \neq -\infty \\ -\infty & \text{if } \alpha = -\infty. \end{cases}$$

(1.4.c) べき対象:$PD = (\mathrm{Sub}(\mathcal{N} \times D), \tilde{\tau})$ ただし、

$$\tilde{\tau}E := \{\ (n, d) \mid (n+1, d) \in E\ \}.$$

$\mathrm{Sub}(A \times D) \overset{\simeq}{\rightrightarrows} \mathcal{D}\mathbf{yn}(A, PD)$ は、次のように与えられる。各 $R \subset A \times D$ と $a \in A$ に対して、$\kappa_R(a) \in \mathrm{Sub}(\mathcal{N} \times D)$ を、次の図が pull-back となるように定める。

$$\begin{tikzcd}
\kappa_R(a) \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathcal{N} \times D \arrow[d] \\
R \cap (\omega(a) \times D) \arrow[r, tail] & \omega(a) \times D.
\end{tikzcd}$$

すると、$a \to b$ ならば $\kappa_R(a) \to \kappa_R(b)$ がしめせるので、$\kappa_R : A \to PD$ が射であることがわかる。

(1.5) 力学系の命題論理

	古典論理	力学系の論理
真理値対象	$\{\ 0, -\infty\ \}$	$\Omega = \{\ x \in \mathbf{Z} \mid x \leq 0\ \} \cup \{\ -\infty\ \}$
真	0	
偽	$-\infty$	
命題	$\varphi : X \to \{\ 0, -\infty\ \}$ 部分集合 $\lvert\varphi\rvert := \varphi^{-1}(0)$	$\varphi : D \to \Omega$ 部分力学系 $\lvert\varphi\rvert := \varphi^{-1}(0)$
解釈	$x \models \varphi \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi(x) = 0$	
否定	$\lvert\neg\varphi\rvert = \lvert\varphi\rvert^c$ $x \models \neg\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad x \not\models \varphi$	$\lvert\neg\varphi\rvert = \{\ x \mid \omega(x) \cap \lvert\varphi\rvert = \emptyset\ \}$ $x \models \neg\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \tau^n(x) \not\models \varphi$
2重否定	$\lvert\neg\neg\varphi\rvert = \lvert\varphi\rvert$	$\lvert\neg\neg\varphi\rvert = \{\ x \mid \omega(x) \cap \varphi \neq \emptyset\ \}$ ($\lvert\varphi\rvert$ の basin) $x \models \neg\neg\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \tau^n x \models \varphi$
排中律	$X = \lvert\varphi\rvert \cup \lvert\neg\varphi\rvert$	$D \supseteq \lvert\varphi\rvert \cup \lvert\neg\varphi\rvert$ しかし $D = \lvert\neg\neg\varphi\rvert \cup \lvert\neg\varphi\rvert$ すなわち $D = Basin(\lvert\varphi\rvert) \coprod Basin(\lvert\varphi\rvert)^c$
論理積	$\min\{\alpha, \beta\}$	
論理和	$\max\{\alpha, \beta\}$	
含意	$\lvert\varphi \Rightarrow \psi\rvert = \lvert\varphi\rvert^c \cup \lvert\psi\rvert$	$\lvert\varphi \Rightarrow \psi\rvert = \{\ x \mid \omega(x) \cap \lvert\varphi\rvert \subset \lvert\psi\rvert\ \}$ $x \models \varphi \Rightarrow \psi \Leftrightarrow \forall n \in T\,[\tau^n x \models \varphi \to \tau^n x \models \psi]$

(1.6) レポート問題 距離空間と連続変換の成すカテゴリーの構造を調べよ。

2. 非決定的力学系

(2.1) 基礎概念

(2.1.a) 定義：$\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1)$ が非決定的力学系であるとは、Γ が有向グラフであって、すなわち、

$$\Gamma^1 \subset \Gamma^0 \times \Gamma^0$$

であり、どの頂点からも辺が出ていることをいう。頂点を状態、辺を遷移ともいう。$(v, w) \in \Gamma^1$ のとき $v \overset{\Gamma}{\to} w$, あるいは単に、$v {\to} w$ と書く。また、しばしば、$v \in \Gamma$ により,v が Γ の頂点（状態）であることを表す。

$\gamma = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$ が道であるとは、$v_i \overset{\Gamma}{\to} v_{i+1} \quad (i = 1, \cdots, m-1)$ が成り立つことをいう。

注意：力学系はどの頂点の出次数も丁度 1 である有向グラフとみなせる。

(2.1.b) 定義：$\phi : \Gamma_1 {\to} \Gamma_2$ が **simulation map** であるとは、

$$\forall v_1 \in \Gamma_1^0 \forall w_2 \in \Gamma_2^0 [f(v_1) {\to} w_2 \ \Rightarrow\ \exists v_2 \in \Gamma_1^0 [v_1 {\to} v_2 \wedge \phi(v_2) = w_2]],$$

すなわち

$$\phi_* \mathrm{Child}_{\Gamma_1}(v_1) = \mathrm{Child}_{\Gamma_2}(\phi(v_1)) \quad \forall v_1 \in \Gamma_1^0$$

が成り立つことをいう。ただし、

$$\mathrm{Child}_\Gamma(x) := \{\ y \mid x \overset{\Gamma}{\to} y\ \}.$$

非決定的力学系を 対象 simulation map を arrow とするカテゴリーを $\mathcal{ND}$**yn** と書く。

(2.1.c) 部分非決定的力学系: 包含写像 $\Gamma_1 {\to} \Gamma$ が simulation map であるとき、すなわち、

$$v \in \Gamma_1 \Rightarrow \mathrm{Child}(v) \subset \Gamma_1$$

が成り立つとき、Γ_1 を部分非決定的力学系 という。部分非決定的力学系の全体を $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ と書く。

(2.2) bisimulation

(2.2.a) 非決定的力学系 Γ_i $(i = 1,\ 2)$ に対して、$R \subset \Gamma_1^0 \times \Gamma_2^0$ が **bisimulation(双模倣)** であるとは、ある simulation map $\psi_i : \Gamma {\to} \Gamma_i$ $(i = 1,\ 2)$ 　が存在して、

$$R = \{\ (\psi_1(v), \psi_2(v) \mid v \in \Gamma\ \}$$

となることをいう。

(2.2.b) 命題. R が bisimulation であるためにはすべての $\forall (v_1, v_2) \in R$ に対して次が成り立つことが必要かつ十分な条件である：

$$\forall w_1 \in \Gamma_1\ [v_1 {\to} w_1 \quad \Longrightarrow \quad \exists w_2 \in \Gamma_2 [(w_1, w_2) \in R\ \wedge\ v_2 {\to} w_2]]$$

かつ

$$\forall w_2 \in \Gamma_2\ [v_2 {\to} w_2 \quad \Longrightarrow \quad \exists w_1 \in \Gamma_1 [(w_1, w_2) \in R\ \wedge\ v_1 {\to} w_1]]\,.$$

(2.2.c) 命題. R, R' が bisimulation ならば、$R \cup R'$, ${}^tR$, $R \circ R'$ も bisimulation.　従って、R が Γ の自己 bisimulation ならば、Γ を含む最小の同値関係もまた bisimulation となる。

(2.2.d) 命題. R が非決定的力学系 Γ の同値関係かつ bisimulation ならば、商集合のうえに $[v]\to[w] \iff v\to w$ により 非決定的力学系の構造が入り、商写像が simulation map となる。

(2.3) 一状態の生成する 非決定的力学系.

(2.3.a) 定義. Γ が **tree** であるとは、それが連結なグラフであり、しかも、ある写像 boss : $\Gamma^0\to\Gamma^0$ のグラフの逆となっていること、すなわち、$\Gamma^1 = \{\ (\mathrm{boss}(v), v) \mid v \in \Gamma^0\ \}$ であることをいう。連結性より、 $\mathrm{boss}(*) = *$ となる頂点*がただ一つ定まる。これを tree Γ の **root** と呼ぶ。

(2.3.b) 定義. Γ の各頂点 v に対して、tree である $\mathrm{Path}_\Gamma(v)$ が定義される：その頂点は v を始点とする有限長の道、辺 $\gamma\to\gamma'$ は、道 γ が道 γ' の最後の部分を取り除いたものであること、すなわち、

$$\gamma = (v, v_1, \cdots, v_n), \quad \gamma' = (v, v_1, \cdots, v_n, w)$$

となっていることを意味する。$\mathrm{boss}(\gamma') = \gamma$, $\mathrm{boss}((v)) = (v)$ となっている。

(2.3.c) 命題 $\psi : \Gamma_1\to\Gamma_2$ が simulation map ならば各 $v \in \Gamma_1$ に対して、

$$\psi_* : \mathrm{Path}_{\Gamma_1}(v)\to\mathrm{Path}_{\Gamma_2}(\psi(v))$$

が導かれ、全射となる。

(2.3.d) 命題. 写像 $\varpi(v) : \mathrm{Path}_\Gamma(v)^0\to\Gamma^0 \quad (v, v_1, \cdots, v_n) \mapsto v_n$ は simulation map となる。この像を Γv と書く。

(2.3.e) 命題.

(2.3.e.i) $\phi : \Gamma_1\to\Gamma_2$ が monic であための必要十分な条件は ϕ が写像として単射であることである。

(2.3.e.ii) simulation map $\psi : \Gamma_1\to\Gamma_2$ に対して、像 $\mathrm{Im}(\psi)$ が

$$(\{\ \psi(v) \mid v \in \Gamma_1\ \}, \{\ \psi v\to\psi w \mid v\to w\ \})$$

により定義される。

(2.4) カテゴリーとしての性質

(2.4.a) 初対象：$\mathbf{0} = (\emptyset, \emptyset)$,

(2.4.b) 終対象：$\mathbf{1} = (\{\ *\ \}, \{\ (*, *)\ \})$,

(2.4.c) テンソル積：$\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 = (\Gamma_1^0 \times \Gamma_2^0, \Gamma_1^1 \times \Gamma_2^1)$

(2.4.c.i) $(\Gamma,\Gamma_2) \mapsto \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ は bifunctor.

(2.4.c.ii) $\mathbf{1} \otimes \Gamma \simeq \Gamma$

(2.4.c.iii) $\Gamma_2\to\mathbf{1}$ は $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2\to\Gamma_1$ を引きおこす。

(2.4.c.iv) 積は一般には存在しない。すなわち、$\Gamma \to \Gamma_i$ $(i = 1,\ 2)$ は $\Gamma \to \Gamma_1 \times \Gamma_2$ を一般には導かない。これは、Γ が Γ_i $(i = 1,\ 2)$ の各々を simulate し得ても、Γ_i の双方を同時に simulate することは一般には出来ないこと意味する。

なお、力学系の場合には、Γ, Γ_i $(i = 1,\ 2)$ のいずれも各状態からの遷移は一意的なので、Γ は双方を同時に simulate できるのである。

(2.4.d) テンソル積 **(2):** $\psi_i : \Gamma_i \to \Gamma$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、非決定的力学系 $\Gamma_1 \otimes_\Gamma \Gamma_2$ を、状態空間を

$$\Gamma_1^0 \times_{\Gamma^0} \Gamma_2^0 := \{\ (v_1, v_2) \in \Gamma_1^0 \times \Gamma_2^0 \mid \psi_1(v_1) = \psi_2(v_2)\ \}$$

遷移を、

$$(v_1, v_2) \to (w_1, w_2) \quad \Longleftrightarrow \quad v_1 \to w_1\ \wedge\ v_2 \to w_2$$

により定めると、$\kappa_i : \Gamma_1 \otimes_\Gamma \Gamma_2 \to \Gamma_i$ $(i = 1,\ 2)$ $((v_1, v_2) \mapsto v_i)$ は simulation map となる。

注意：

(2.4.d.i) $\Gamma_1 \otimes_\Gamma \Gamma_2$ は $\Gamma_1, \Gamma, \Gamma_2$ について functorial である。

(2.4.d.ii) $\Gamma_1 \otimes_\Gamma \Gamma_2$ の状態空間は $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ の部分集合であるが、包含写像は simulation map ではない。

(2.4.d.iii) 次は pull-back diagram には一般にはならない。

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_3 \arrow[r, "\kappa_1"] \arrow[d, "\kappa_2"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "\psi_1"] \\
\Gamma_2 \arrow[r, "\psi_2"'] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

しかし、ψ_i のいずれかが monic であれば、pull-back となる

(2.4.d.iv) $\Gamma \otimes_\Gamma \Gamma \simeq \Gamma.$

(2.4.e) 和：$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 = (\Gamma_1^0 \coprod \Gamma_2^0, \Gamma_1^1 \coprod \Gamma_2^1)$

(2.4.f) **coequalizer** $f_i : \Gamma \to \Gamma_1$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、coequalizer $F : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & \Gamma_1 \arrow[r, "F"] & \Gamma_2
\end{tikzcd}$$

構成法:$R := \{\ (f_1(v), f_2(v)) \mid v \in \Gamma\ \}$ を含む最小の同値関係を作ると、これが自己双模倣となる。このとき、この同値関係による商集合を状態空間とし、商写像が simulation map となるような 非決定的力学系 Γ_2 が同型を除いて唯一つ存在する。

(2.4.g) **push-out** $\psi_i : \Gamma \to \Gamma_i$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、非決定的力学系 $\Gamma_1 \oplus_\Gamma \Gamma_2$ を、次の図が coequalizer となるように定義する：

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, shift left, "\psi_1"] \arrow[r, shift right, "\psi_2"'] & \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \arrow[r] & \Gamma_1 \oplus_\Gamma \Gamma_2
\end{tikzcd}$$

(2.4) hyperset(非有基的集合) について.

(2.4.a) 集合 Λ に対して、**accecible pointed Λ-graph** (あるいは Λ-apg) とは 組 (Γ, p) で次の条件を満たすもの：

- Γ は非決定的力学系
- $p \in \Gamma^0$ は $\Gamma p = \Gamma$ を満たす。
- $\mathrm{Leaf}_\Gamma := \{ v \in \Gamma^0 \mid \mathrm{Child}(v) = \{ v \} \}$ は Λ の部分集合。

(2.4.b) Λ-apg(Γ_i, p_i) $(i = 1,\ 2))$ に対して、simulation map $\psi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ が

- $\psi(p_1) = p_2$,
- $\psi(\ell) = \ell \quad \forall \ell \in \mathrm{Leaf}_\Gamma$

を満たすとき、Λ-apg-map という。

(2.4.c) R が Λ-apg $\mathcal{A}_i = (\Gamma_i, p_i)$ $(i = 1,\ 2)$ の間の **bisimulation(双模倣)** 対応であるとは、R が Γ_i $(i = 1,\ 2)$ の間の bisimulation であって、$(p_1, p_2) \in R$ が成り立つことをいう。このこき、$\mathcal{A}_i$ $(i = 1,\ 2)$ は双模倣同値であるといい、$\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$ と書く。

(2.4.c.i) 命題. R が bisimulation ならば、$\pi : R \to \Gamma_i^0$ は全射。

(2.4.c.ii) 命題. $\simeq$ は Λ-apg の全体の上の同値関係となる。

(2.4.d) Λ-apg の bisimulation 同値類のことを **Λ-hyperset** という。$\{ \top, \bot \}$-apg $(\{ \top \}, \top)$ と $(\{ \bot \}, \bot)$ の同値類を各々$\top, \bot$ と書く。

Λ-apg (Γ, p) と、$q \in \mathrm{Child}(p)$ に対して、$[(\Gamma q, q)] \in [(\Gamma, p)]$ と書く。これが well-defined であることが容易に示される。明らかに $\top \in \top$, $\bot \in \bot$.

(2.5) $\mathcal{ND}\mathbf{yn}$ は subobject classifier を持つ

(2.5.a) subobject classifier :$(\Omega, \top)$

- $\{ \top, \bot \}$-hyperset の全体を Ω , 遷移を $a \to b \iff b \in a$ と定めると、非決定的力学系 Ω が定義される。
- $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ を $\top(*) = \top$ により定める。

(2.5.b) 特性写像：$\psi : \Gamma_1 \to \Gamma$ を monic とする。$\Gamma_1^0 \subset \Gamma^0$ とみなしてよい。

$$
\begin{aligned}
\Gamma_2 &:= \{ v \in \Gamma \mid v \notin \Gamma_1^0, \quad \Gamma v \cap \Gamma^0 \neq \emptyset \} \\
\Gamma_3 &:= \{ v \in \Gamma \mid v \notin \Gamma_1^0, \quad \Gamma v \cap \Gamma^0 = \emptyset \}
\end{aligned}
$$

とおくと、あきらかに $\Gamma^0 = \Gamma_1^0 \coprod \Gamma_2 \coprod \Gamma_3$ となる。非決定的力学系 $\overline{\Gamma}$ を

$$
\overline{\Gamma}^0 = \begin{cases} \{ \top, \bot \} \bigcup \Gamma_2 & \text{if } \Gamma_3 \neq \emptyset \\ \{ \top \} \bigcup \Gamma_2 & \text{if } \Gamma_3 = \emptyset \end{cases}
$$

$$v \to w \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} & v, w \in \Gamma_2, \quad v \overset{\Gamma}{\to} w \\ \text{または} & v \in \Gamma_2, \quad w = \top, \quad \exists w' \in \Gamma_1^0 \left[v \overset{\Gamma}{\to} w' \right] \\ \text{または} & v \in \Gamma_2, \quad w = \bot, \quad \exists w' \in \Gamma_3 \left[v \overset{\Gamma}{\to} w' \right] \\ \text{または} & v = w = \top \\ \text{または} & v = w = \bot \end{cases}$$

と定める。$\chi : \Gamma \to \Omega$ を

$$\chi(v) := \begin{cases} \top & \text{if } v \in \Gamma_1 \\ \left[(\overline{\Gamma} v, v) \right] & \text{if } v \in \Gamma_2 \\ \bot & \text{if } v \in \Gamma_3 \end{cases}$$

と定めると、$\chi^{-1}\top = \Omega_1$ であり、次の図が pull-back となる：

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "!"'] & \Gamma \arrow[d, "\chi"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

すなわち、χ は ψ の分類写像となる。

このような χ が唯一つであることは Ω が hyperset のカテゴリーでの final object であることからわかる。

(2.6) カテゴリー $\mathcal{T}ree$ 上の presheaf としての 非決定的力学系

(2.6.a) 木のカテゴリー $\mathcal{T}ree$： 対象は木、射は simulation map。従って、$\mathcal{T}ree$ は $\mathcal{ND}\mathbf{yn}$ の full subcategory.

(2.6.b) $\mathcal{T}ree$ 上の presheaf category: $\mathcal{T}ree^{op}$ から $\mathcal{S}\mathbf{et}$ への functor を $\mathcal{T}ree$ 上の **presheaf** と呼ぶ。それを対象とし、natural transformation を射とするカテゴリーを

$$\widehat{\mathcal{T}ree} := \mathrm{Func}\,(\mathcal{T}ree^{op}, \mathcal{S}\mathbf{et})$$

と書く。このカテゴリーの基本的性質は

(2.6.b.i) $\widehat{\mathcal{T}ree}$ は complete かつ cocomplete で

$$(\lim P_j)(C) = \lim(P_j(C)), \quad (\mathrm{colim} P_j)(C) = \mathrm{colim}(P_j(C)).$$

(「極限は pointwise にとれる」)

(2.6.b.ii) 米田写像と呼ばれる full embedding $\mathbf{y} : \mathcal{T}ree \to \widehat{\mathcal{T}ree}$ が

$$\mathbf{y}(T)(T') := \mathcal{T}ree(T', T)$$

により定義される。

(2.6.b.iii) トポスである。

(2.6.c) 定理. $R : \mathcal{ND}\mathbf{yn} \to \widehat{\mathcal{T}ree}$ が $R(\Gamma)(T) = \mathcal{ND}\mathbf{yn}(T, \Gamma)$ により定義されるが、

(2.6.c.i) R は left adjoint $L : \widehat{\mathcal{T}ree} \to \mathcal{ND}\mathbf{yn}$ をもつ ：

$$\widehat{\mathcal{T}ree}(P, R\Gamma) \simeq \mathcal{ND}\mathbf{yn}(LP, \Gamma).$$

(2.6.c.ii) counit $\epsilon_\Gamma : L(R(\Gamma)) \to \Gamma$ は同型となる。従って $\mathcal{ND}\mathbf{yn}$ は $\widehat{\mathcal{T}ree}$ の reflective subcategory となる。

（cf: [Mac Lane & Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic], p41 Theorem 2 ）

(2.6.d) 構成法.　　$P \in \widehat{\mathcal{T}ree}$ に対して

$$L(P) = \mathrm{colim}\left(\int P \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}ree \subset \mathcal{ND}\mathbf{yn}\right),$$

ただし、$\int P$ は

- 対象：$(T, p) \quad (p \in P(T))$
- 射 $\psi : (T, p) \to (T', p')$： $P(\psi)(p') = p$ を満たす simulation map $\psi : T \to T'$

なるカテゴリー、 $\int P \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}ree$ は $(T, p) \mapsto T$ なる functor.

$\mathcal{ND}\mathbf{yn}$ は cocomplete なので（cf. (2.4)）この族の colimit が定義される。具体的には、

$$\coprod_{T \in \mathcal{T}ree, p \in P(T)} T_p \quad (T_p \text{ は } T \text{ のコピー })$$

に $t\sim\psi(t)$ （$\psi:(T,p)\to(T',p')$）の生成する bisimulation 同値関係を入れて商をとる。この構成は次のようにも言える：

$$L(P):=\{\ (p,t)\mid p\in P(T),\ t\in T,\ T\in\mathcal{T}ree\ \}/\simeq$$

ただし、

$$(p',\psi t)\simeq(p'\psi,t)\quad(p'\in P(T'),\ t\in T,\ \psi:T\to T').$$

(2.6.e) counit

$$\epsilon_\Gamma:LR\Gamma\to\Gamma$$

は $[(\varphi,t)]\mapsto\varphi(t)$ $(\varphi\Gamma(T)=\mathcal{ND}\mathbf{yn}(T,\Gamma))$ により与えられる。

(2.6.f) 系. $\mathcal{T}ree$ は $\mathcal{ND}\mathbf{yn}$ の中で dense, すなわち、非決定的力学系は $\mathcal{T}ree$ の colim として表される。

(2.6.g) 注意. unit $\eta_P:P\to RLP$ は同型とは限らない、すなわち

$$\eta_P(T):P(T)\to\mathcal{ND}\mathbf{yn}(T,\mathrm{colim}(\int P\to\mathcal{T}ree\subset\mathcal{ND}\mathbf{yn})),$$

$(P(T)\ni p\mapsto[t\mapsto[(p,t)]])$ は同型とはならない。従って $R:\mathcal{ND}\mathbf{yn}\to\widehat{\mathcal{T}ree}$ は同型ではない。

(2.6.g.i) 問題. $\mathbf{y}(\Gamma)\in\widehat{\mathcal{T}ree}$ は tree の colim を lim に写す、すなわち、$T\simeq\mathrm{colim}T_j$ ならば、$\mathcal{ND}\mathbf{yn}(T,T')\simeq\lim\mathcal{ND}\mathbf{yn}(T_j,T')$ となるか。

(2.6.g.ii) 一般の $\widehat{\mathcal{T}ree}$ の対象 $P:\mathcal{T}ree\to\mathcal{S}\mathbf{et}$ はこれを満たさない。(問題：この例を挙げよ。)

(2.6.g.iii) 問題：逆に colim を lim に写せば、$\mathcal{ND}\mathbf{yn}$ の米田写像による像となるか？

(2.6.h) 例

(2.6.h.i) $T\to\mathrm{Sub}(T)$ に対して、$L(\mathrm{Sub})\simeq\Omega$.

(2.6.h.ii) 問題：$T\to\mathrm{Sub}(T\otimes\Gamma)$ から定義される $P\Gamma$ は power object となるか？すなわち、以下のように定義される射

$$\Phi:\mathrm{Sub}(\Gamma_1\otimes\Gamma_2)\to\mathcal{ND}\mathbf{yn}(\Gamma_1,P\Gamma_2)$$

は同型か？$\Gamma\subset\Gamma_1\otimes\Gamma_2$ と $v_1\in\Gamma_1$ に対して、

$$\kappa(v_1)\in\mathrm{Sub}(\mathrm{Path}(v_1)\otimes\Gamma_2)$$

を次が pull-back となるように定める。

$$\begin{tikzcd}
\kappa(v_1) \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathrm{Path}(v_1)\otimes\Gamma_2 \arrow[d] \\
\Gamma\cap(\Gamma v_1\otimes\Gamma_2) \arrow[r, tail] & \Gamma v_1\otimes\Gamma_2
\end{tikzcd}.$$

そして、

$$\Phi(\Gamma):=\overline{\kappa(v_1)}$$

と定義する。

(2.6.h.iii) 問題：$T \to \mathcal{ND}\mathbf{yn}(\Gamma_1 \otimes T, \Gamma_2)$ から定義される $[\Gamma_1, \Gamma_2]$ はべき対象となるか？すなわち、以下のように定義される射

$$\Psi : \mathcal{ND}\mathbf{yn}(\Gamma \otimes \Gamma_1, \Gamma_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{ND}\mathbf{yn}(\Gamma, [\Gamma_1, \Gamma_2])$$

は同型となるか？

$F : \Gamma \otimes \Gamma_1 \to \Gamma_2$ と $v \in \Gamma$ に対して

$$\kappa_F(v) \in \mathcal{ND}\mathbf{yn}(\mathrm{Path}(v) \otimes \Gamma_1, \Gamma_2)$$

を次の図が可換になるように定義し、$\Psi(F)(v) := \overline{\kappa_F(v)}$ とおく。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Path}(v) \otimes \Gamma_1 \arrow[d, "\varpi(v) \otimes 1"'] \arrow[dr, "\kappa_F(v)"] & \\
\Gamma \otimes \Gamma_1 \arrow[r, "F"'] & \Gamma_2
\end{tikzcd}$$

（$\Phi : \mathcal{ND}\mathbf{yn}(\Gamma, [\Gamma_1, \Gamma_2]) \to \mathcal{ND}\mathbf{yn}(\Gamma \otimes \Gamma_1, \Gamma_2)$ が存在して、$\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ とはなるが、$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ とはならない。）

(2.6.h.iv) 問題. $P\Gamma \simeq [\Gamma, \Omega]$ となるか？

(2.7) $\widehat{\mathcal{T}ree}$ に Grothendieck 位相を入れて、$\mathcal{NDyn}$ の sheaf 化を行う。

(2.7.a) $\mathcal{T}ree$ 上の Grothendieck 位相

$$J(T) = \{ \text{sieve} S_{\{ T_i \}} \mid \{ T_i \} \text{ は } T \text{ の covering} \}$$

ただし、

- T の部分木の集まり、$\{ T_i \mid i \in I \}$ が covering であるとは root からの任意の無限長道 γ は、ある T_i の像と交わるもの。
- $S_{\{ T_i \}}$ は像が T_i のいずれかに入る T への射の全体。(T 上の sieve となる、すなわち、射の右合成で閉じた集合となる。)

(2.7.b) 命題.　　$J = \{ J(T) \mid T \in \mathcal{T}ree \}$ は Grothendieck 位相となる。すなわち

(2.7.b.i) $t_T := \{ f \mid f \text{ の codmain は } T \} \in J(T)$.

(2.7.b.ii) $h : T' \to T,\ S \in J(T)$ ならば

$$h^* S := \{ g \in t_{T'} \mid h \circ g \in S \} \in J(T').$$

(2.7.b.iii) $S \in J(T)$, R は T 上の sieve で、

$$h^* R \in J(\mathrm{D}(h)) \quad \forall h \in S$$

ならば、$R \in J(T)$.

(2.7.c) 定義（$\mathrm{Sh}(\mathcal{T}ree, J)$ 上の sheaf）.　　$F \in \widehat{\mathcal{T}ree}$ が J について sheaf であるとは、任意の $S = S_{\{ T_i \}} \in J(T)$ について matching family $\{ x_f \mid f \in S \}$ と $x \in F(T)$ とが $x_f = xf$ によって 1 対 1 に対応することをいう。ただし、$\{ x_f \}$ が matching family であるとは、

$$x_{fg} = x_f g \quad D \overset{\forall f}{\to} T \in S \quad D' \overset{\forall g}{\to} D.$$

また、$F(f)(x)$ を xf と書く。

(2.7.d) $\mathrm{Sh}(\mathcal{T}ree, J) \subset \widehat{\mathcal{T}ree}$ を site $(\mathcal{T}ree, J)$ 上の sheaf 全体とする。$\mathbf{a} : \widehat{\mathcal{T}ree} \to stree$ を sheafification 作用素とする。

(2.7.e) $\mathcal{NDyn} \to \widehat{\mathcal{T}ree} \overset{\mathbf{a}}{\to} \mathrm{Sh}(\mathcal{T}ree, J) \subset \widehat{\mathcal{T}ree} \overset{L}{\to} \mathcal{NDyn}$ の合成を $\Gamma \mapsto \widehat{\Gamma}$ と書く。

(2.7.f) 例.

(2.7.f.i) $\widehat{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$.

(2.7.f.ii) $\mathbf{1} \widehat{\oplus} \mathbf{1}$ は、2 つのアトムから生成される集合の宇宙となる。(ただし、$\mathcal{T}ree$ を有限分岐の木のカテゴリーとするならば、hereditary finite な普通の集合の宇宙である。)

(2.7.g) 問題.　　一般の 非決定的力学系 Γ について $\widehat{\Gamma}$ を記述せよ。(予想：$\mathcal{NDyn}(\mathbf{1}, \Gamma)$-apgs $\Gamma v \quad (v \in \Gamma)$ の bisimulation classes の生成する宇宙となる。)

3. オートマトン

(3.1) 基礎概念.

(3.1.a) 定義. オートマトンとは 5 つ組 (X, I, O, τ, ϖ) のことをいう、ただし

- X:集合（状態空間）
- I:集合（入力信号空間）
- O:集合（出力信号空間）
- $\tau : X \times I \to X$:写像（状態遷移規則）
- $\varpi : X \times I \to O$:写像（出力規則）.

関数関係図

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[dr] & X \arrow[loop right] \arrow[d] \\ & O \end{tikzcd}$$

(3.1.b) 言い替え：

- τ は、パラメータ付き力学系 $\{\ (X, \tau_i) \mid i \in I\ \}$ とみなせる、ただし、$\tau_i(x) = \tau(x, i)$.
- ϖ は、パラメータ付き関数 $\{\ \varpi_x : I \to O \mid x \in X\ \}$ とみなせる。

(3.1.c) 記号

- $x\,i := \tau(x, i)$,
- $x \xrightarrow{i} x\,i$,
- $x(i_1 \cdots i_n) := (\cdots((x\,i_1)i_2)\cdots i_{n-1})\,i_n$.

(3.1.d) ラベル付き表示：X を頂点集合とし、$\tau(x, i) = y$, $\varpi(x, i) = o$ のとき、$x \xrightarrow{i/o} y$ と書く。

(3.2) 例

(3.2.a) 力学系.　　$|I| = 1$ のときは、観測下の力学系を表す。

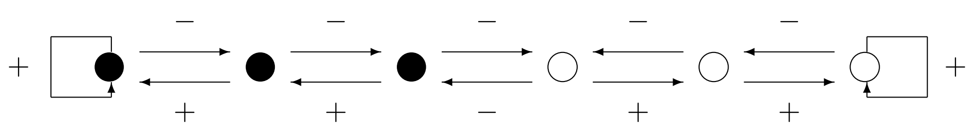
(3.2.b) 問題.

(3.2.b.i) $|X| \leq 5$ の力学系を数え上げよ。

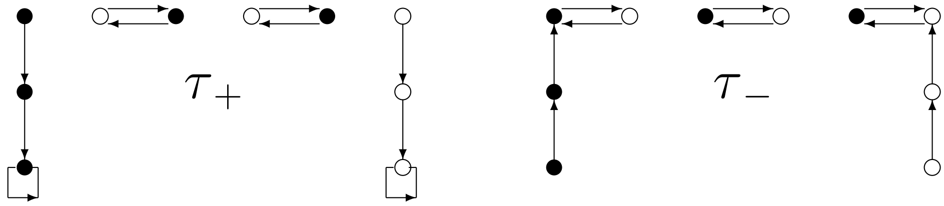
(3.2.b.ii) $|I| = 2$, $|O| = 1$, $|X| = 3$ となるオートマトンを数え上げよ。ただし、「同型」なものは同じとみなす。

(3.2.c) 学習系.　　$I = \{\ +, -\ \}$, $O = \{\ \alpha, \beta\ \}$　　のとき、賞罰 $(\{\ +, -\ \})$ を通して 2 つの選択肢 $(\{\ \alpha, \beta\ \})$ の選び方を変える系のモデルを与える。

(3.2.c.i) 次で、白円は α を, 黒円は β を出力。



(3.2.c.ii) [Tsetlin]



(3.3) オートマトン概念の意義

(3.3.a) 履歴を持つ反応系. $\mathcal{M} = (X, I, O, \tau, \varpi)$ 初期状態 $x_0 \in X$ を決めると写像 $\widehat{\varpi}_{\mathcal{M},x_0} : I^* \to O^*$ が $i_1 \cdots i_n \mapsto o_1 \cdots o_n$ により定義される、ただし

$$x_j := \tau(i_{j-1}, x_{j-1}), \quad o_j := \varpi(i_{j-1}, x_{j-1}) \quad (1 \leq j \leq n).$$

o_n は i_n だけからは一般に決まらない。

(3.3.b) 言語の recognizer. $O = \{ \top, \bot \}$ のとき、形式言語

$$L(\mathcal{M}, x_0) := \{ \sigma \in I^* \mid \varpi(x_0 \sigma) = \top \}$$

が定まる。X が有限のとき、この言語は正則言語と呼ばれ、色々な特徴付けが出来る (Kleene の定理)。

- 正則文法で定まる言語。
- 正則式で定まる言語。
- ラベル付きの有限な有向グラフの道に対応する語の全体。

X が無限のときは、一般の帰納的に枚挙可能な言語が生成される。チューリング機械もオートマトンとして表現できるので、逆に任意の帰納的に枚挙可能な言語は、適当な無限オートマトンによって認識される。

(3.3.c) 閉じた系の構造記述. 閉じた系（力学系）を「分割」すると、部分系はオートマトンとして記述され、全体はオートマトンの合成系として記述される。
力学系 (Z, τ) の状態空間が $Z = Z_1 \times Z_2$ と分割されるとき、

$$\tau(z_1, z_2) = (\tau_1(z_1, z_2), \tau_2(z_1, z_2))$$

と書くと、2 つのオートマトンが生じる：

	X	I	O	τ	ϖ
$\mathcal{M}_1$	Z_1	Z_2	Z_1	$(z_1, z_2) \mapsto \tau_1(z_1, z_2)$	$(z_1, z_2) \mapsto z_1$
$\mathcal{M}_2$	Z_2	Z_1	Z_2	$(z_2, z_1) \mapsto \tau_2(z_1, z_2)$	$(z_2, z_1) \mapsto z_2$

(3.4) オートマトンのカテゴリー.

(3.4.a) $\psi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ がオートマトン準同型であるとは、次が可換なような写像の 3 組

$$\psi = (\psi_X : X_1 \to X_2, \psi_I : I_1 \to I_2, \psi_O : O_1 \to O_2)$$

をいう:

$$\begin{tikzcd} X_1 \times I_1 \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\psi_X \times \psi_I"'] & X_1 \arrow[d, "\psi_X"] \\ X_2 \times I_2 \arrow[r, "\tau_2"'] & X_2 \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} X_1 \times I_1 \arrow[r, "\varpi_1"] \arrow[d, "\psi_X \times \psi_I"'] & O_1 \arrow[d, "\psi_O"] \\ X_2 \times I_2 \arrow[r, "\varpi_2"'] & O_2 \end{tikzcd}.$$

(3.4.b) オートマトンを対象とし、オートマトン準同型を射とするカテゴリーを $\mathcal{AM}$ と書く。

(3.4.c) 自然な forgetful functor

$$\mathcal{AM} \to \mathcal{S}\mathbf{et} \times \mathcal{S}\mathbf{et}$$

が $\mathcal{M} \mapsto (I, O)$ により定義される。$\mathcal{S}\mathbf{et} \times \mathcal{S}\mathbf{et}$ の部分カテゴリー

$$\{ \{ (I, O) \}, \{ \mathrm{id}_I \times \mathrm{id}_O \} \}$$

の引き戻しカテゴリーを $\mathcal{AM}_{\mathbf{I},\mathbf{O}}$ と書く。すなわち、入力信号空間が I, 出力信号空間が O のオートマトンを対象とし、射 ψ は $\psi_I = \mathrm{id}_I$, $\psi_O = \mathrm{id}_O$ を満たすものとする。

(3.5) $\mathcal{AM}_{\mathbf{I}} = \mathcal{AM}_{I,\mathbf{1}}$ は、category $(\{ * \}, I^*)$ から $\mathcal{S}\mathbf{et}$ への functor category　なので、一般論よりトポスとなる。たとえば分類写像は以下のようになる。

(3.5.a) 分類対象：$\Omega_I := \{ I \subset I^* \mid p \cdot i \subset I \quad \forall i \in I \}$. オートマトン構造は $p \xrightarrow{i} i : p$ で与えられる、ただし $i : p = \{ \sigma \in I^* \mid i\sigma \in p \}$。$\top := I^*$,$\perp := \emptyset$ とおく。

(3.5.b) 命題.

- $p\sigma = \top \iff \sigma I^* \subset p$,
- $p\sigma = \perp \iff \sigma I^* \cap p = \emptyset$.

(3.5.c) 分類写像：部分対象 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ に対して、$\chi_{\mathcal{N}} : \mathcal{M} \to \Omega_I$ が

$$\chi_{\mathcal{N}}(x) := \{ \sigma \mid x\sigma \in \mathcal{N} \} \in \Omega_I$$

により定義される。

(3.5.d) 問題.　　積・和・べき対象・射対象などを記述せよ。

(3.6) オートマトンの複合

(3.6.a) 併置 $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$

(3.6.b) パイプ $\mathcal{M}_1 ; \mathcal{M}_2$

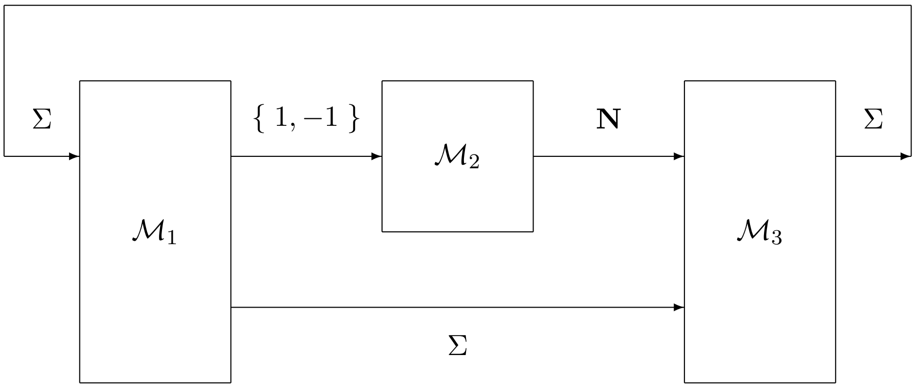
(3.6.c) 再帰 $\mu_I \mathcal{M}$

(3.7) 例.

(3.7.a) チューリング機械

成分	X	I	O	$\tau \times \varpi$
ヘッド $\mathcal{M}_1$	Q	Σ	$\Sigma \times \{1, -1\}$	通常のデータ
位置 $\mathcal{M}_2$	$\mathbf{N}$	$\{1, -1\}$	$\mathbf{N}$	$(\alpha, n) \mapsto (\alpha + n, n)$
テープ　$\mathcal{M}_3$	Σ^*	$\Sigma \times \mathbf{N}$	Σ	$(\alpha, n, \sigma) \mapsto (\sigma', \sigma(n))$

ただし、σ' は第 n 成分が α で、他は σ と同じ。



(3.7.b) オートマタ・ネットワーク（セルオートマトン・神経回路網）

4. 時系列

(4.1) 時系列記述の前提、タイプ I ：「対象の観察」

- 観察により各時点でシステムについてのある指標を得ることができる。その指標は、ある集合 Σ に属する。
  - Σ の例としては、有限集合、実数、有限次元ユークリッド空間、関数空間、等がある。
- この指標を継時的に記録出来て、一つの系列 $\xi \in \Sigma^*$ を得る。
  - 時間は、離散的、または、連続的な場合がある。
  - 仮想的に無限回記録出来るとし、$\xi \in \Sigma^{\mathbf{N}}$ を得ると考えることが多い。(例えば、ニューロンについてであれば、分オーダーの継続的記録は無限回の記録とみなせる。)

- この観察は繰り返すことができて、系列の集合 $L \subset \Sigma^*$ として、システムの外延的記述を得る。
  - 時不変な性質が問題となるときは、1回の観察 ξ から、シフトによって多数の系列が得られる。

(4.2) 問題： L を内包的に記述できないか？

(4.2.a) L を生成する規則を与える：

- 微分方程式・確率過程 （マルコフ過程）
- 生成文法

(4.2.b) L の満たす性質を探す。 $\xi \models \varphi \forall \xi \in L$ を満たすような命題 φ （e.g. temporal logic の命題）を探す。

(4.3) 時系列記述の前提、タイプII：「パラメータ制御下の観察」

(4.3.a) 対象となるシステムに影響を与える信号の集まり I がある。

(4.3.b) I^* の元 η を決めて、上のように観察実験をする。これにより、

$$I^* \supset \mathcal{E}\mathrm{xp} \ni \eta \mapsto L_\eta \subset \Sigma^*$$

を得る。

$$L_{\mathcal{E}\mathrm{xp}} = \{ (\eta, \xi \mid \eta \in \mathcal{E}\mathrm{xp},\ \xi \in L_\eta \}$$

が、実験によって得られた、対象についての外延的知識となる。

(4.4) 問題：この $L_{\mathcal{E}\mathrm{xp}}$ を内包的に記述せよ。

方法の例：

- I を入力信号空間、Σ を出力信号空間とするオートマトン $\mathcal{M}$ を構成し、それによる言語の変換が $\mathcal{E}\mathrm{xp} \mapsto L_{\mathcal{E}\mathrm{xp}}$ となるようにする。
  - しかし、$\mathcal{M}$ は一意には定まるとは限らない。他のパラメータ設定 $\eta \notin \mathcal{E}\mathrm{xp}$ については、異なる振る舞いをするモデルが有り得る。

(4.5) 時系列記述の前提：タイプＩＩＩ「系の反応に応じて入力を制御」

(4.5.a) 系の出力に応じて、入力を決める規則 $\mathcal{R}$ を定めておく。(実験者はオートマトンとして振る舞う。)

(4.5.b) これにより、$L_{\mathcal{R}} \subset \Sigma^*$ がえら得る。

(4.5.c) $\mathcal{R}$ を変えることにより、$L_{\mathcal{R}}$ の集まり $\mathcal{L}$ を得る。

(4.6) 問題：このような外延的知識 $\mathcal{L} = \{ L_{\mathcal{R}} \mid \mathcal{R} \}$ をどのように記述すればよいか？

- (4.4 と同様に)I を入力信号空間、Σ を出力信号空間とするオートマトンを構成し、それと $\mathcal{R}$ との合成力学系の軌道が $L_{\mathcal{R}}$ となるようにする。
- しかし、実験者の計画 $\{ \mathcal{R} \}$ をどのように記述すればよいか？

(4.7) 多成分時系列　対象となっている系が複数の部分系を持つとき、各時点で得られる指標は、組 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$ になる。従って、観察後に得られる外延的知識は

$$R \subset \Sigma_1^{\mathbf{N}} \times \cdots \times \Sigma_n^{\mathbf{N}}$$

となる。R の各成分への射影を $R_i \subset \Sigma_i^{\mathbf{N}}$ とすると、

$$R \subset R_1 \times \cdots \times R_n$$

であるが、等号が一般には成り立たない。等号が成り立たないことが、部分系が相互作用していることの、外延的記述への現れとなっている。

R の内包的記述（例えば部分系間の関数関係的関係）は、対象となっている系の内部構造の一つの表現法を与えると考えることもできる。

非同期システム

非同期的扱い　系を観察していて、顕著な振舞いを記録することによっても、時系列 $R \subset \Sigma^*$ を得る。この場合は、Σ は観察者が関心を持っている振舞いの名前の集まりとなる。各々の振舞いに費やされる時間は一定ではないので、時間は単に振舞いの順序関係を記録する役割しか演じなくなる。（従って、$\xi_1, \xi_2 \in R$ の n 番目の成分を比較することは意味がなくなる。）

今後、同期的記述（時間の長さに意味のある記述）が不適切な現象の記述法を考察する。各部分系での経過時間を正確に比較できない場合には、ある時刻での「全体の状態」は積極的意味を失うので、状態概念を基礎とする力学系的枠組以外の枠組みが必要になる。

---

5. イベントとプロセスについて　状態概念に代わるものとして「イベント」と「プロセス」が原始的概念として採用されることが多いが、それらの数学的定式化は多様である。最初に、それらの背景となっていると思われる描像を明確にすることを試みよう。

(5.1) イベント概念の「公理」.

(5.1.a) 原子イベントは離散的である。（時空的にコンパクトなパターンである。）

(5.1.b) ２つの異なる原子イベントは時空的に重ならない。

- ２つの原子イベントが同時に起こっていれば、違う「場所」で起こっている。
- ２つの原子イベントが同所に起こっていれば、違う「時間」に起こっている。

(5.1.c) ２つの原子イベントを比較することができる。

- 適当な識別法により有限個の種類に分類することができる。（ただし、パラメータは無限個の値をとってもよい。）
- 分類法は恣意的である。

(5.1.d) 複数のイベントを、一つのイベントとみなせる。

(5.2) 既約プロセスの「公理」　　「場所」の一つの抽象化としてプロセスを考えることができる。既約プロセスは「一点」に対応する。

(5.2.a) イベント e とプロセス P の間には、「属する」という２項関係 $e \in P$ がある。($e \notin P$ ということは、プロセス P はイベント e の生起に関与しないという積極的な内容を持つ。)

(5.2.b) 一つのイベントは複数のプロセスに属し得る。

(5.2.c) $e_1, e_2 \in P$ ならば、イベント e_1, e_2 は同時には生起できない。

(5.2.d) イベントの分類法の変更に応じてプロセスが変化する。

(5.3) プロセスの「公理」

(5.3.a) 既約プロセスはプロセスである。

(5.3.b) ２つのプロセス P, Q は並列合成 $P||Q$ できる。

- $e \in P||Q \iff e \in P \vee e \in Q,$
- $a \in P, a \notin Q, b \in Q, b \notin P$ のとき、a, b は同時生起可能である.

(5.3.c) 各プロセス P は次元 $\dim P$ を持つ。

- $\dim P \leq k \iff P$ では、$k+1$ 個以上のイベントが同時に生起できない。(従って、既約プロセスの次元は１以下である。)
- $\dim(P||Q) \leq \dim P + \dim Q$.

6. 遷移系とプロセス　対象が関与するいくつかのイベントを選び、それを通してイベントを捉えようとするとき、最初に時系列の集まりとして対象は記述される。遷移系は、時系列集合を順序的規則性により記述するものである。時系列集合自身を遷移系として表現することは可能であるが、順序的規則性は最大自己双模倣同値関係として抽出できて、商遷移系として時系列集合の最小遷移系表現が得らる。

(6.1) 基礎概念.

(6.1.a) 定義.　集合 X, A と直積集合 $X \times A \times X$ の部分集合 τ との三つ組 (A, X, τ) を遷移系 (transition system) という。$(x, a, y) \in \tau$ のとき、$x \xrightarrow{a} y$ と書く。

集合 A の元をイベント、集合 X の元を、ここだけの用語であるが現状と呼ぶ。$x \xrightarrow{a} y$ は、現状 x が a というイベントの発生と共に、y という現状に遷移することを表す。イベントとしては、システムへの入力・システムからの出力・内部変化等を考えることができる。

遷移系 $\mathcal{T}$ と X の一つの元の組 $(\mathcal{T}, x)$ をプロセスと呼ぶ。

(6.1.b) 例 (i) 力学系

(6.1.b.i) 力学系 (X, τ) は、遷移系 $(\{\tau\}, X, T_\tau)$ とみることができる、ただし、

$$T_\tau := \{ (x, \tau, \tau(x)) \mid x \in X \}.$$

より一般に $A = \{\tau\}$ ならば、遷移系は非決定的力学系と考えることもできる。

(6.1.b.ii) また、力学系 (X, τ) と観測量 $f : X \to A$ があるとき、遷移系 $(A, X, T_{\tau,f})$ が得られる、ただし $T_{\tau,f} := \{ (x, f(x), \tau(x)) \mid x \in X \}$. この場合はイベント a はシステムを観測して a という観測値を得たことを表す。

(6.1.c) 例 (ii) オートマトン　$\mathcal{M} = (X, A, O, \tau, \varpi)$ は遷移系 $(A \times O, X, T_{\mathcal{M}})$ を定める、ただし、$T_{\mathcal{M}} := \{ (x, (a, \varpi(x, a)), \tau(x, a)) \mid x \in X,\ a \in A \}$. イベントは、システムへの入力と出力との組となる。

(6.2) プロセスと時系列集合.

(6.2.a) 時系列.　A の有限列または無限列の全体を A^{**} と書く。空列を λ と書く。

遷移系から時系列系　遷移系 $\mathcal{T} = (A, X, T)$ と $x \in X$ に対して、時系列集合 $(A, R(\mathcal{T}, x)) \subset A^{**}$ が次のように定められる。無限列 $a_0 a_1 a_2 \cdots$ が $x \in X$ からはじまる $\mathcal{T}$ のイベント系列であるとは、すべての自然数 i について　$x_i \xrightarrow{a_i} x_{i+1}$ となるような $x_i \in X$ が存在することをいう、ただし $x_0 = x$ とおく。また、有限列 $a_0 a_1 a_2 \cdots a_m$ が $x \in X$　からはじまる $\mathcal{T}$ のイベント系列であるとは、$i < m$ について $x_i \xrightarrow{a_i} x_{i+1}$ となるような $x_i \in X$ が存在するが、$x_m \xrightarrow{a} y$ となる a, y は存在しないことをいう。x から始まる $\mathcal{T}$ のイベント系列の全体を $H(\mathcal{T}, x)$ と書く。

(6.2.b) 時系列系から遷移系　時系列系 $\mathcal{S} = (A, H)$ （すなわち $H \subset A^{**}$）から次のようにして、遷移系 $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = (A, X_H, T_H)$ が定義される：まず、X_H の元は A の有限列からなっており、空列 λ であるか、または $\mathcal{S}$ の部分時系列である，ただし、H に属する A–系列を有限のところで切ってえられるものを、部分時系列という。ξ も ξa も $\mathcal{S}$ の

部分時系列であるとき、$\xi \overset{a}{\to} \xi a$ と定めることで T_H が定義される。(この遷移系は、グラフとしては λ を root とする木となっていて、各辺は唯一つのラベルを持つ。このような遷移系は synchronization tree と呼ばれることがある。)

あきらかに $(A, H(\lambda, \mathcal{T}(\mathcal{S}))) = \mathcal{S}$ となる。後で定義する、遷移系から最小遷移系を構成する方法適用すると、時系列系を記述する遷移系の中で最小なものがただ一つ存在することがわかる。

(6.3) 遷移系の射.

(6.3.a) 準同型 $\mathcal{T}_i = (A_i, X_i, T_i)$ $(i = 1,\ 2)$ を遷移系とする。二つの写像 $f : A_1 \to A_2$ と $g : X_1 \to X_2$ が、「$x \overset{a}{\to} y$ ならば $f(x) \overset{g(a)}{\to} f(y)$」という条件を満たしているとき、組 (f, g) を $\mathcal{T}_1$ から $\mathcal{T}_2$ への準同型と呼ぶ。このとき、$a_0 a_1 a_2 \cdots$ を $f(a_0) f(a_1) f(a_2) \cdots$ に対応させる写像 $f_* : H(\mathcal{T}_1, x) \to H(\mathcal{T}_2, g(x))$ が定まる。

(6.3.b) 遷移系の模倣的準同型. $\mathcal{T}_i = (A_i, X_i, T_i)$ $(i = 1,\ 2)$ を遷移系とする。準同型 (f, g) は次の性質を満たすとき模倣的であるという：「$g(x_1) \overset{a_2}{\to} y_2$ ならば $g(y_1) = y_2$, $f(a_1) = a_2$ かつ $x_1 \overset{a_1}{\to} y_1$ となる $y_1 \in X_1$ と $a_1 \in A_1$ が存在する。」

一般の準同型については $f_* \mathcal{H}(\mathcal{T}_1, x) \subset \mathcal{H}(\mathcal{T}_2, g(x))$ しか成り立たないが、模倣的準同型があるときは、明らかに $f_* \mathcal{H}(x, \mathcal{T}_1) = \mathcal{H}(g(x), \mathcal{T}_2)$ が成り立つ。とくに、$f = \mathrm{id}$ ならば、挙動を見ているだけでは、模倣的準同型な遷移系は区別できないことになる。

(6.3.c) 遷移系の双模倣対応 遷移系 $\mathcal{T}_i = (A, X_i, T_i)$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、X_i $(i = 1,\ 2)$ の間の関係 $R \subset X_1 \times X_2$ が次の条件を満たすとき、$\mathcal{T}_i$ $(i = 1,\ 2)$ の間の双模倣対応であるという：すべての $(x_1, x_2) \in R$ に対して、

- $x_1 \overset{a}{\to} y_1$ ならば、$x_2 \overset{a}{\to} y_2$ かつ $(y_1, y_2) \in R$ となる $y_2 \in X_2$ がある。
- $x_2 \overset{a}{\to} y_2$ ならば、$x_1 \overset{a}{\to} y_1$ かつ $(y_1, y_2) \in R$ となる $y_1 \in X_1$ がある。

(6.4) 定理. $(x_1, x_2) \in R$ となる双模倣対応 R が存在するための必要十分な条件は

$$\mathcal{H}(\mathcal{T}_1, x_1) = \mathcal{H}(\mathcal{T}_2, x_2)$$

となることである。

(6.5) 最小遷移系 双模倣関係の全体は和で閉じているので、2つの遷移系の間には最大の双模倣関係が存在する。これを $R(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ と書く。(p3.2 の (2.2) の内容と実質的には同じ。)

双模倣という性質は、関係の合成・逆に関して保たれるので、遷移系 $\mathcal{T} = (A, X, T)$ と自分自身との最大双模倣関係は X 上の同値関係となる。その同値類集合を $\overline{X}$ とおくと、

$$[x] \overset{a}{\to} [y] \iff x \overset{a}{\to} y$$

と定めることにより遷移系 $\overline{\mathcal{T}} := (A, \overline{X}, \overline{T})$ が定義される。商写像 $x \mapsto [x]$ は模倣的準同型 $\mathcal{T} \to \overline{\mathcal{T}}$ を定めるので、すべての $x \in X$ に対して

$$\mathcal{H}(\mathcal{T}, x) = \mathcal{H}(\overline{\mathcal{T}}, [x])$$

となる。$\overline{\mathcal{T}}$ は $\mathcal{T}$ との間に双模倣関係を持つ遷移系の中で「サイズ」が最小のものとして同型を除いて特徴付けられる (Myhil-Nerode の定理の一種)。$\overline{\mathcal{T}}$ は自分自身との間の最大双模倣関係が対角線集合となっているが。このような遷移系を最小遷移系と呼ぶ。双模倣同値類は同型を除いてただ一つの最小遷移系を含むので、最小遷移系は遷移系の標準系として利用できる。

(6.6) プロセスの演算　$\mathcal{T} = (A, X, T)$, $\mathcal{T}_i = (A_i, X_i, T_i)$ $(i = 1,\ 2)$ を遷移系とする。以下用いる x_0 という記号は、それが使われる前にでてきてはいない何かをあらわすことにする。

(6.6.a) 前置　$a \in A$ に対して

$$a.(\mathcal{T}, x) := ((A, X \cup \{\ x_0\ \}, T \cup \{\ (x_0, a, x)\ \}, x_0)$$

(6.6.b) 選択

$$(\mathcal{T}_1, x_1) + (\mathcal{T}_2, x_2) := \Big((A_1 \cup A_2, X_1 \coprod X_2 \cup \{\ x_0\ \}, T'), x_0\Big)$$

ただし、$(x_i, a, y) \in T_i)$ （ $i = 1$ または $i = 2$ ）であるような (x_0, a, y) を T につけ加えたものが T' である。

(6.6.c) 並列積

$$(\mathcal{T}_1, x_1)||(\mathcal{T}_2, x_2) := (\mathcal{T}_1||\mathcal{T}_2, (x_1, x_2)).$$

ここで

$$\mathcal{T}_1 \mid\mid \mathcal{T}_2 = (A_1 \cup A_2, X_1 \times X_2, T_{12}).$$

ただし、T_{12} は、次のいずれかが成り立つような a, x_i, y_i $(i = 1,\ 2)$ からつくられる 3 組 $((x_1, x_2), a, (y_1, y_2))$ の全体とする。

- $a \in A_1 \setminus A_2$ かつ $x_1 \stackrel{a}{\to} y_1,\ x_2 = y_2,$
- $a \in A_2 \setminus A_1$ かつ $x_1 = y_1,\ x_2 \stackrel{a}{\to} y_2,$
- $a \in A_1 \cap A_2$ かつ $x_1 \stackrel{a}{\to} y_1,\ x_2 \stackrel{a}{\to} y_2.$

(6.6.d) イベントの変換　f を A から別の集合 A' への写像で、τ を保つとする。このとき、$(\mathcal{T}, x)[f] := ((A', X, T'), x)$ が

$$T' := \{\ (x, f(a), y) \mid (x, a, y) \in T\ \}$$

により定義される。

(6.6.e) イベントの隠ぺい　A の部分集合 B で τ を含まないものに対して、

$$(\mathcal{T}, x) \setminus B := (\mathcal{T}, x)[f].$$

ただし、$f : A \to A \setminus B$ を $x \notin B$ に対しては $f(x) = x$, $x \in B$ に対しては $f(x) = \tau$ と定める。

(6.7) プロセス演算の時系列表現

(6.7.a) $H(a.\mathcal{P}) = a.H(\mathcal{P})$

(6.7.b) $H(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = H(\mathcal{P}_1) \cup H(calP_2)$

(6.7.c) $H(\mathcal{P}_1||\mathcal{P}_2) = H(\mathcal{P}_1)|||H(\mathcal{P}_2)$ ただし、$H(\mathcal{P}_1)|||H(\mathcal{P}_2)$ は $(A_1 \cup A_2)^{**}$ の元 ξ で、その中の A_i に属する部分だけを取り出すと $H(\mathcal{P}_i)$ に属するようなものの全体を表す。これを $H(\mathcal{P}_i)$ $(i = 1,\ 2)$ のインターリーブ合成という。

(6.7.d) $H(\mathcal{P}[f]) = f_* H(\mathcal{P})$

(6.8) まとめ.

(6.8.a) 遷移系は、数学的にはラベル付き有向グラフに他ならない。遷移系と印（任意に選ばれた一つの頂点）の組をプロセスと呼ぶ（印は現在の「状態」を表す）。従って一つの遷移系は頂点の数だけ多くのプロセスを生ずる。

(6.8.b) プロセス　$\mathcal{P} = (\mathcal{T}, p)$ は時系列集合 $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ を定める。

- しかし、これは多対 1 である
- $\mathcal{H}(\mathcal{T}, p) = \mathcal{H}$ となる最小の $(\mathcal{T}, p)$ がある。（これは非有基的集合としても捉えられる。）
- プロセスの同値性を双模倣同値関係で定める。
- しかし、双模倣同値の概念には種々の定義があり、目的に応じて適切さが異なる。（同期系では強双模倣（これは非決定的力学系に対して (2.2) 節で導入したものに対応）、非同期系では弱双模倣が標準的な定義となる。）

(6.8.c) 演算が豊富（$\Longrightarrow$ プロセスをモデルとする種々のプロセス代数が構成される。）

- 新挙動の自由な生成：$a.P$,
- 選択合成（非決定性）： $P + Q$,
- 並列合成（その両極端として同期合成／インターリーブ合成）$P||Q$
- 多様な再帰性の表現 $\mu_X P$ (「プロセス方程式は唯一つの解を持つ」)

(6.8.d) イベントの再分類に対応して遷移系は変換される： $P \mapsto P[\rho]$

- 特に、いくつかのイベントの隠ぺいに対応して τ-動作（外部に影響を与えず、また外部から影響を受けないすべての内部動作を表す）が生じる。
- τ-動作の回数が問題とはしないことにより弱双模倣の概念が生じる。

(6.8.e) 遷移系の制約.　　遷移系は、対象の空間的構造を直接には表現できない。

- インターリーブにより生ずる見かけの非決定性と、選択合成により生ずる非決定性とは、皮相的には区別できない。
- プロセス代数では $P||Q$ という演算が空間的構造をある程度表現するが、遷移系ではこれは表面上は現れない。

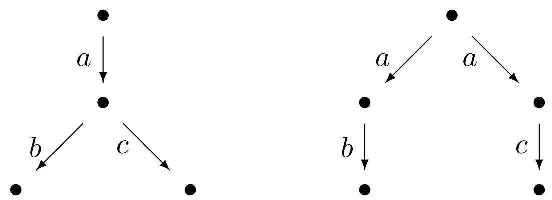
(6.8.f) まとめ.　　遷移系によるプロセスの定式化は、時系列による表現よりはやや抽象度が高いが、「還元主義的」役割を持つ：様々な高次のプロセスについての考察は、とりあえずは遷移系のことばで表現できるが、遷移系の枠組自身にはその考察を適切に表現する手段はない。

参考文献

[WN] Winskel, Glynn and Nielsen, Mogens. Models for concurrency.

[M] Milnor, A.R.G.. Commnunication and concurrency. Prentice Hall, 1989.

前回の訂正　定理 (6.4) は誤り。反例は、



ともに、$\mathcal{H} = \{\ ab, ac\ \}$ となるが、これらは双模倣同値ではない。成り立つのは次である：

定理　$\mathcal{P}_i = (\mathcal{T}_i, x_i)$ $(i = 1,\ 2)$ をプロセスとする。

- $(x_1, x_2) \in R$ となる双模倣対応 R が存在すれば

  $$(*) \qquad \mathcal{H}(\mathcal{T}_1, x_1) = \mathcal{H}(\mathcal{T}_2, x_2)$$

  となる。

- $\mathcal{P}_i$ $(i = 1,\ 2)$ が共に次の性質 $(**)$ を満たすならば、$(x_1, x_2) \in R$ となる双模倣対応 R が存在することと $(*)$ が成り立つこととは同値となる。

  $$(**) \qquad \forall x, a, y, y' [\ x \xrightarrow{a} y \wedge x \xrightarrow{a} y' \Longrightarrow y = y'\ ]$$

---

7. ペトリネット　ペトリネットは、空間的要素を導入し、遷移の作用の影響が局所的であるとすると、遷移の独立性概念が派生的に定義される：作用域の交わらない場合に複数の遷移が同時に生ずることが可能になるからである。また、遷移の間の競合も、作用域に於ける資源の取り合いとして派生的に定義される。これは遷移（イベント）の競合を定義の中に組み込むイベント構造と対照的である。

(7.1) multiset.　集合 B に対して、写像 $\mu : B \to \mathbf{N}$ を multisubset という。その全体を $\mathbf{pow}^*(B)$ と書く。μ を $\sum_{b \in B} \mu(b) b$ と表示することもある。

- $\mu \supset \nu \quad \Longleftrightarrow \quad \forall b [\mu(b) \geq \nu(b)]$,
- $\mu \cup \nu := \sum_{b \in B} \max \{\ \mu(b), \nu(b)\ \} b$,
- $\mu \cap \nu := \sum_{b \in B} \min \{\ \mu(b), \nu(b)\ \} b$,
- $\mu + \nu := \sum_{b \in B} (\mu(b) + \nu(b)) b$,
- $\mu - \nu := \sum_{b \in B} (\mu(b) - \nu(b)) b, \quad$ if $\mu \supset \nu$.

(7.2) 定義.　$(B, M_0, E, pre, post)$ がペトリネットであるとは

- B は集合で、その元を **place** と呼び、$\mathbf{pow}^*(B)$ の元を **marking** と呼ぶ。ただし、

$$\mathbf{pow}^*(B) := \mathrm{Map}(B, \mathbf{N})$$

  は、B の重複をゆるす部分集合 (multi subset)。
- M_0 は **initial marking** と呼ばれる $\mathbf{pow}(B)$ の元。
- $pre : E \to \mathbf{pow}^*(B)$ は写像で **precondition map** と呼ばれる。
- $post : E \to \mathbf{pow}^*(B)$ は写像で **postcondition map** と呼ばれる。

(7.3) グラフ表示.　　ペトリネット $\mathcal{PN} = (B, M_0, E, pre, post)$ に対して、次のようにして辺に重みの付いた有向グラフ $\Gamma_{\mathcal{PN}}$ を定めることができる（このグラフは M_0 にはよらない。）：

- 頂点集合は $B \cup E$,
- 辺は次のいずれか $(b \in B, e \in E)$
  - $b \xrightarrow{n} e$, ただし、$pre(e)(b) = n > 0$,
  - $e \xrightarrow{n} b$, ただし、$post(e)(b) = n > 0$.

ただし、重みが 1 の辺は、重みを省略する。

E-頂点は、四角で表し、その中に E の元を記入する。B-頂点は丸で表し、一つの marking $M \in \mathbf{pow}^*(B)$ は、各、$b \in B$ の頂点の丸の中に $M(b)$ 個の黒丸を書いて表現する。

(7.4) ペトリネットの定めるプロセス.　　ペトリネット $\mathcal{PN}$ とラベル $\lambda : T \to A$ とは次のようにしてプロセス $\mathcal{P}_{\mathcal{PN},\lambda} = ((A, X, T), M_0)$ を定める：

- $\tilde{T}$ を $(M, e, N) \in \mathbf{pow}^*(B) \times E \times \mathbf{pow}^*(B)$ で $M \supset pre(e)$ かつ $M - pre(e) + post(e) = N$ を満たすものの全体とおく。
- 遷移系 $(A, \mathbf{pow}^*(B), \tilde{T})$ で M_0 から到達可能な marking の全体を X とおき、T を $\tilde{T} \cap (X \times E \times X)$ の写像 $1_X \times \lambda \times 1_X : X \times E \times X \to X \times A \times X$ による像として定める。

(7.5) 注意.　　遷移系をラベル付きペトリネットによって表現することができる；プロセス $\mathcal{P} = ((A, X, T), x_0)$ に対して、ペトリネット $\mathcal{PN}_{\mathcal{P}} = (X, x, T, pre, post)$ と、ラベル $\lambda : T \to A$ が

$$pre((x, a, y)) := x, \quad post((x, a, y)) := y, \quad \lambda((x, a, y) := a$$

により定義される。

これは token が常に唯一つの特殊なペトリネットとなる。token の数が、並列性の度合いを表していると考えられるので、遷移系のこの表示は、並列性のない表現と考えられる。特に、合成

$$\mathcal{T} \mapsto \mathcal{PN}_{\mathcal{T}} \mapsto \mathcal{T}_{\mathcal{PN}}$$

は一般には元に戻らない。

(7.6) ペトリネットの並列合成　$\mathcal{PN}_i = (B_i, M_{i0}, E_i, pre_i, post_i)$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、その合成 $\mathcal{PN}_1 || \mathcal{PN}_2 = (B, M_0, E, pre, post)$ が

$$B = B_1 \coprod B_2 \quad B_0 = M_{10} + M_{20} \quad E = E_1 \cup E_2$$

と

$$pre(e) := pre_1(e) + pre_2(e) \quad post(e) := post_1(e) + post_2(e)$$

により定義される。ただし、$e \notin E_i$ のとき $pre_i(e) = post_i(e) = 0$ とおく。

E_1 と E_2 とが共通部分を持たない場合には、合成したペトリネットのグラフは単に、各ペトリネットのグラフを併置したものになる。

---

8. イベント構造　イベント構造は、動的な対象をイベント間の相互関係を通して記述する。これは、状態間の相互関係を通して動的対象を記述する遷移系と相補的な関係を持つ (cf[P])。

(8.1) 定義.　$\mathcal{PO} = (E, \leq, A, \lambda)$ が A 上の pomset (partially ordered multiset) であるとは、

- E は集合で、その元をイベントと呼ぶ。
- $(E, \leq)$ は順序集合。$e \leq f$ に「e が f に先行する」という意味を与える。
- $\lambda : E \to A$ は写像で、$\lambda(e)$ をイベント e のラベルと呼ぶ。

(8.2) pomset の定める遷移系　$\mathcal{PO} = (E, \leq, A, \lambda)$ に対して、遷移系 $\mathcal{T}_{\mathcal{PO}} = (A, \mathcal{O}, T)$ が

- $\mathcal{O} = \{\ I \subset E \mid I$ は $(E, \leq)$ の ideal $\}$
- $T = \{\ (I, \lambda(e), I \cup \{\ e\ \}) \mid I, I \cup \{\ e\ \} \in \mathcal{O}\ \}$

により定義される。ただし、$I \subset E$ が ideal であるとは、

$$i \in I \wedge j \leq i \quad \Longrightarrow \quad j \in I$$

が成り立つことをいう。$(\mathcal{O}, \subset)$ は **pow** (E) の部分集合で, $\cap, \cup$ で閉じているので distributive lattice である。

(8.3) pomset の定めるペトリネット　$\mathcal{PO} = (E, \leq, A, \lambda)$ に対して、ペトリネット $\mathcal{PN}_{\mathcal{PO}} = (B, M_0, E, pre, post)$ が次のように定義される：

- $B = \{\ (e, f) \mid e$ は f の直前の元 $\} \cup \{\ (e, e) \mid e$ は極小元または極大元 $\}$,
- $M_0 := \sum_{e:\text{極小}} (e, e)$　,
- $pre(e) = \{\ (f, e) \mid (f, e) \in B\ \}$,
- $post(e) = \{\ (e, f) \mid (e, f) \in B\ \}$,

ラベル $\lambda : E \to A$ はそのまま、$\mathcal{PN}_{\mathcal{PO}}$ のラベルとする。

$$\mathcal{PO} \mapsto \mathcal{PN}_{\mathcal{PO}} \mapsto \mathcal{T}_{\mathcal{PN}}$$

の合成は、$\mathcal{T}_{\mathcal{PO}}$ と一致する。

(8.4) イベント構造　　pomset では分岐は見かけ上のものしかない。真の分岐を取り入れるためにイベント同志が両立しないという概念を導入する。

$\mathcal{E}v = (E, \leq, A, \lambda, \#)$ がイベント構造であるとは、

- $(E, \leq, A, \lambda)$ は pomset
- $\# \subset E \times E \setminus \Delta$ は対称な関係。$e\#f$ のとき、イベント e, f は両立しないという。この関係は

$$e\#f \wedge f \leq f' \implies e\#f'$$

(persistence) を満たすものとする。

(8.5) イベント構造の定める遷移系　　$\mathcal{E}v = (E, \leq, A, \lambda, \#)$ に対して、遷移系 $\mathcal{T}_{\mathcal{E}v} = (A, \mathcal{O}, T)$ が

- $\mathcal{O}$ は $(E, \leq)$ のイデアルで、e, f を含めば、$e\#f$ ではないようなものの全体、
- $T = \{\, (I, \lambda(e), I \cup \{\, e \,\}) \mid I, I \cup \{\, e \,\} \in \mathcal{O} \,\}$

により定義される。$\mathcal{O}$ は $\cap$ で閉じているが、$\cup$ では閉じていないので、lattice にはならない。

参考文献

[P] Pratt, V.:Arithmetic + Logic + Geometry = Concurrency. (in URL "ftp//Boole.Stanford.edu/pub/")

9. イベント空間・代数的束・Domain

順序関係で表現できるイベントの相互関係のタイプは限られている。一般的には任意の命題論理式がイベントの相互関係を表す。各イベント e に対してそれが起こったことを表す命題変数を同じ記号 e で表すとき、イベント集合 E を命題変数集合とする命題論理式は、イベントの相互関係を表現する。例えば、$e{\rightarrow}f$ という論理式が正しいことは、e が起こっていれば、f も起こっている、ということを意味する。

例えば、イベント構造 $\mathcal{E}v = (E, \leq, A, \lambda, \#)$ は、論理式の集まり

$$\{\ e{\rightarrow}f \mid e \leq f\ \} \cup \{\ \neg(e \wedge f) \mid e \# f\ \}$$

で表現される。

イベント間の関係で、

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n {\rightarrow} f$$

という型のものだけを扱うものがイベント空間（情報構造）である。これは、種々の文脈で登場する数学的構造となっている。次の全単射がある：

$$\text{情報構造} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{代数的} \cap \text{構造} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Domain}$$

Domain の種々の演算、イベント空間の演算を与える。

(9.1) 基本的定義　　$(P, \leq)$ を順序集合とする。

(9.1.a) 部分集合 $S \subset P$ が有向 **(directed)** であるとは、S の任意の２元 a, b に対して、$a \leq c$ かつ $b \leq c$ を満たす元 $c \in S$ が存在することをいう。

(9.1.b) $(P, \leq)$ が **CPO** (Complete partial order) であるとは、最小元 $\perp$ をもち、さらに P の有向部分集合は上限を持つことをいう。$D \subset P$ が有向であるとき、$\bigvee D$ を $\bigsqcup D$ と書く。

(9.1.c) CPO $(P, \leq)$ が完備半束であるとは、空でない任意の部分集合 $S \subset P$ に対して下限 $\bigwedge S$ が存在することをいう。(これは、上に有界な部分集合が上限を持つことと同値である。また、P に最大元を添加した順序集合が完備束であることと同値である。)

(9.1.d) CPO P の元　k が有限であるとは、任意の有向部分集合 D に対して、

$$k \leq \bigsqcup D \Longrightarrow \exists d \in D\ [\ k \leq d\ ]$$

が成り立つことをいう。有限な元の全体を $F(P)$ と書く。

(9.1.e) 完備半束 $(L, \leq)$ が **domain(代数的半束)** であるとは、L の任意の元 a に対して

$$a = \bigsqcup \{\ k \in F(L) \mid k \leq a\ \}$$

が成り立つことをいう。

(9.1.f) $(\mathcal{L}, \bigcap)$ が集合 X 上の交差構造であるとは、$\mathcal{L}$ が X の部分集合族であり、交わりに関して閉じていることをいう。交差構造 $(\mathcal{L}, \bigcap)$ が代数的とは、$\mathcal{L}$ の任意の有向部分集合 D に対して、$\bigcup D \in \mathcal{L}$ となることをいう。

$\mathcal{L}$ が X 上の交差構造のとき、有限部分集合 $F \subset X$ が $\mathcal{L}$ のある元に含まれているならばその閉包 $\overline{F}$ が

$$\overline{F} := \bigcap_{F \subset C \in \mathcal{L}} C$$

により定義される。

(9.1.g) 命題. 代数的交差構造 $\mathcal{L}$ に対して、$(\mathcal{L}, \subseteq)$ は domain となる。

（証明：$a = \bigcup \{ \overline{F} \mid F \overset{fin}{\subset} a \}$ で、$\overline{F} \in F(\mathcal{L})$。ただし、$F \overset{fin}{\subset} a$ は F が a の有限部分集合であることを表す。）

(9.2) イベント空間

(9.2.a) 定義. $\mathcal{A} = (A, Con, \vdash)$ が情報構造（イベント空間）であるとは A は集合、Con は A の有限部分集合族で、

(IS–1) $Y \in Con$ かつ $Z \subset Y$ ならば $Z \in Con$,

(IS–2) A の任意の元 A について $\{ a \} \in Con$,

を満たし、さらに、$\vdash \subset Con \times A$ は次を満たす：

(IS–3) $Y \vdash a$ ならば $Y \cup \{ a \} \in Con$,

(IS–4) $Y \in Con$ ならば $Y \times Y \subset \vdash$,

(IS–5) $Y, Z \in Con$, $Y \times Z \subset \vdash$ かつ $Z \vdash a$ ならば $Y \vdash a$.

(9.3) イベント空間の定める代数的交差構造

(9.3.a) consistent subset. イベント空間 $\mathcal{A}$ に対して、$Y \subset A$ が **consistent** であるとは、Y の任意の有限部分集合が Con の元であることをいう。Y が consistent であるとき

$$\overline{Y} := \{ a \mid F \vdash a \text{ for some } F \overset{fin}{\subset} Y \}$$

も consistent となる。$\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ が成り立つ。

E が consistent であり、$\vdash$–closed (i.e. $E = \overline{E}$) であるとき E を $\mathcal{A}$ の状態という。状態の全体を $|\mathcal{A}|$ と書く。

(9.3.b) 定理. イベント空間 $\mathcal{A}$ に対して、$|\mathcal{A}|$ は A 上の代数的交差構造となり、従って domain となる。

(9.4) 代数的交差構造が定めるイベント空間. 逆に A 上の代数的交差構造 $\mathcal{L}$ は、次のようにイベント空間 $\mathcal{A}(\mathcal{L}) := (A, Con_A, \vdash_A)$ を定める：

- $Con_A := \{ F \overset{fin}{\subset} A \mid \exists \ell \in \mathcal{L} \, [F \subset \ell] \}$
- $F \vdash a \quad \overset{def}{\iff} \quad \forall \ell \in \mathcal{L} \, [F \subset \ell \implies a \in \ell \,]$

$\mathcal{A} \mapsto |\mathcal{A}|$ と $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{L})$ とは互いに逆である。

(9.5) domain と代数的交差構造　代数的交差構造は domain であったが、逆に domain は代数的交差構造として実現することができる。$(L, \leq)$ が domain のとき、各 $\ell \in L$ に対して $D_\ell := \{\, k \in F(L) \mid k \leq \ell \,\}$ とおくと部分集合族 $\mathcal{L} = \{\, D_\ell \mid \ell \in L \,\}$ は $F(L)$ 上の代数的交差構造となり、しかも、L と順序集合として同型である。

(9.6) 部分イベント空間の成す Domain　$\mathcal{A} = (A, Con_A, \vdash_A)$ がイベント空間であるとき、$B \subseteq A$ に対して、イベント空間 $\mathcal{B} = (B, Con_B, \vdash_B)$ が

- $Con_B := \{\, Y \subset B \mid Y \in Con_A \,\}$,
- $\vdash_B := \vdash_A \cap (Con_B \times B)$

により定義される。これを $\mathcal{A}$ の部分イベント空間とよび $\mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{A}$ と書く。$\{\, \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{A} \,\}$ は domain となる。

参考文献

[DP] Davey B.A. and H.A. Priestley. Introduction to Lattices and Order. Cambridge Univ Press 1990.

9. Hypercategory

分散系において、各要素の同一時刻の状態を並べた情報、いわゆる snapshot は、系を記述するものとしては意義が薄い。むしろ、諸要素間の関係記述の方が、系の理解に適切なレベルの情報を与えると考えられる。諸要素間の関係は動いている場合には、要素間関係は分散系の「状態」と考えることもできる。

成分間関係の詳細は錯綜していて簡潔な記述を望むべくもない。成分間の結合状況の情報は、粗いレベルの手がかりに過ぎないが、分散系を捉える適切なレベルの記述の一つと考えられる。

以下述べる hypercategory の枠組みは、このレベルの分散系記述を与えると思われる。

hypercategory は *-autonomous category[1] とほぼ同等と思われる初等的な数学的枠組である。hypercategory · 古典線形論理 · 相互作用系との関係は、標語的に

hypercategory	...	射	:	対象	:	対象演算
古典線形論理	...	証明	:	命題	:	論理演算
相互作用系	...	プロセス	:	インターフェース	:	修飾

と表されよう。

polycategory[2] では、インターフェースが入力型と出力型とに分類されていることにより多重カット（インターフェースの多重同時結合）が許されるのに反し、hypercategory では、単独カット（インターフェースの単独結合）しか許されない、それは、インターフェース結合による相互作用が双方向であると想定する場合、多重カットはシステムの凍結をもたらす可能性があるからである。インタフェースの独立・従属情報をマトロイド概念を用いて付加することにより、多重カットを条件付きで許すようにすることもできる。

hypercategory に対象演算を導入することで、インターフェースの修飾を表現できる。どの hypercategory にも、線形論理演算に対応する対象演算が自然に導入される。もとの hypercagetory は拡張した hypercategory に忠実に埋め込まれると思われるので、線形論理演算により新しい射の合成が生じる訳ではないが、これらの演算による射の「前処理」を通して、他の射とのカット（合成）の仕方を詳細に処方することが可能となるのである。

(9.1) 定義　$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ は次の条件を満たすとき *hypercategory* であるという。

H1 $\mathcal{H}_0$ は対象の集まりで、involution τ を持つ。$\overline{a} := \tau a$ と書く。

H2 $\mathcal{H}_1$ は射の集まりで、各射には interface と呼ばれるものが有限個付随している。各 interface は対象を型として持つ。対象 φ の interface の集合を $\partial\varphi$ と書き、interface $\alpha \in \partial\varphi$ の型を $[\alpha]$ と書く。
$\partial\varphi = N_m := \{ 1, 2, \cdots, m \}$ のときは、

$$\phi \models [1], [2], \cdots, [m]$$

と書く。

H3 射 φ と、全単射 $\sigma:\partial\varphi\to Y$ に対して、次のような射 $\sigma.\varphi$ が存在する

- $\partial(\sigma.\varphi)=Y$,
- $[\sigma\alpha]=[\alpha]\quad$ for all $\alpha\in\partial\varphi$.

さらに、

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{\partial\varphi}.\varphi &= \varphi\\ \sigma.(\tau.\varphi) &= (\sigma\tau).\varphi\end{aligned}$$

が成り立つ。

H4 各対象 a に対して、$\partial 1_a=\{\,a,\overline{a}\,\}$, $[a]=a,[\overline{a}]=\overline{a}$ を満たす射 1_a が存在し、$1_a=1_{\overline{a}}$ を満たす。

H5 2つの射 φ,ψ と各々の interface i,j で $\overline{[i]}=[j]$ を満たすものに対して cut と呼ばれる射 $\mathrm{Cut}_{i,j}(\varphi,\psi)$ が存在して

$$\partial\mathrm{Cut}_{i,j}(\varphi,\psi)=\partial\varphi\setminus\{\,i\,\}\coprod\partial\psi\setminus\{\,j\,\}$$

を満たし、タイプはもとのタイプを継承する。

これは次の4つの性質を持つ。

H6 可換である：

$$\sigma.\mathrm{Cut}_{i,j}(\varphi,\psi)=\mathrm{Cut}_{j,i}(\psi,\varphi),$$

ただし σ は直和の因子を入れ換える全単射

$$\sigma:\partial\varphi\setminus\{\,i\,\}\coprod\partial\psi\setminus\{\,j\,\}\longrightarrow\partial\psi\setminus\{\,j\,\}\coprod\partial\varphi\setminus\{\,i\,\}.$$

H7 2つの射 φ,ψ と全単射 $\sigma:\partial\varphi\to X,\quad \tau:\partial\psi\to Y$ に対して

$$\left(\sigma|_{\partial\setminus\{\,i\,\}}\times\tau|_{\partial\setminus\{\,j\,\}}\right).\mathrm{Cut}_{i,j}(\varphi,\psi)=\mathrm{Cut}_{\sigma i,\tau j}(\sigma.\varphi,\tau.\psi),$$

H8 恒等射の性質　　$i\in\partial\varphi$, $[i]=a$ のとき

$$\sigma.\mathrm{Cut}_{i,a}(\varphi,1_a)=\varphi$$

ただし、

$$\sigma:\partial\varphi\setminus\{\,i\,\}\coprod\{\,a\,\}\to\partial\varphi$$

は、$\sigma(j):=j\quad(j\neq i)$, $\sigma(a):=i$ で定義される全単射。

H9 結合法則　　$i\in\partial\varphi_1$, $j,k\in\partial\varphi_2\quad(j\neq k)$, $\ell\in\partial\varphi_3$ かつ、$\overline{[i]}=[j]$, $\overline{[k]}=[\ell]$ のとき、

$$f.\mathrm{Cut}_{k,\ell}\left(\mathrm{Cut}_{i,j}(\varphi_1,\varphi_2),\varphi_3\right)=\mathrm{Cut}_{i,j}\left(\varphi_1,\mathrm{Cut}_{k,\ell}(\varphi_2,\varphi_3)\right)$$

ただし、f は次のような自然な全単射。

$$f:\left(\partial\varphi_1\setminus\{\,i\,\}\coprod\partial\varphi_2\setminus\{\,j\,\}\right)\setminus\{\,k\,\}\coprod\partial\varphi_3\setminus\{\,\ell\,\}\longrightarrow\partial\varphi_1\setminus\{\,i\,\}\coprod\left(\partial\varphi_2\setminus\{\,k\,\}\coprod\partial\varphi_3\setminus\{\,\ell\,\}\right)\setminus\{\,j\,\}$$

(9.2) thin hypercategory　　どのような型の列 $a_1,\cdots,a_m$ に対しても $\varphi\models a_1,\cdots,a_m$ となる射 φ が高々一つであるとき、hypercategory は **thin** であるという。

(9.3) 説明　射の interface にはラベルが与えられているが、そのラベルは各 interface をを特定するだけの役割しか果たさない (H3,H6,H7)。

射を図示すれば interface は場所によって特定できるので、名前は必要なくなり、射についての諸命題が簡潔に表現される。

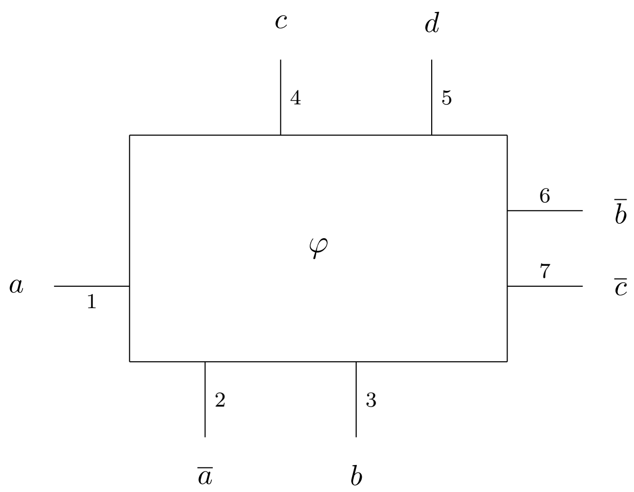
射を以下のように図示する。

(9.3.a) 射は単純閉曲線で囲まれた図形で表し、名前を内部に書く。

(9.3.b) interface ごとに線を外部に書く。interface i に対して

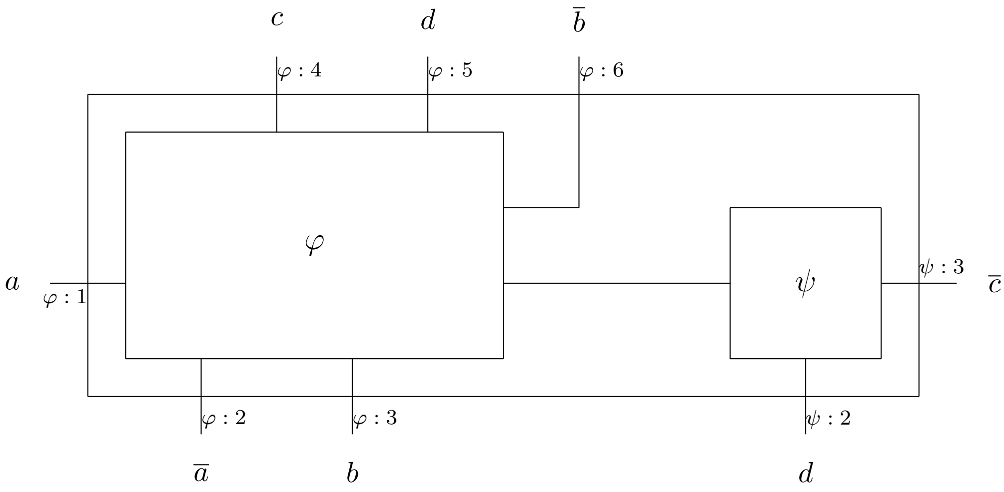
- 線にラベル i を書く。
- 線の先に $[i]$ を書く。

例えば、$\varphi \models a, \overline{a}, b, c, d, \overline{b}, \overline{c}$ のとき（すなわち、$\partial\varphi = \{\,1,2,3,4,5,6,7\,\}$, $[1] = a, [2] = \overline{a}, [3] = b, \cdots$ のとき、）



cut による結合は、2 つの射を含む単一閉曲線を描き、cut する　interface の線は内部で結び、残りの線は外部まで延ばし、もとの型を外に書く。図示では、各 interface の由来は明かであるが、図形を変形する場合には interface の identity を明確にする為に、内部のラベルの前に射の名前を : を付したラベル（例えば $\varphi : 1$ など）を書く。

例えば $\psi \models c, d, \overline{c}$ のとき、$\mathrm{Cut}_{7,1}(\varphi, \psi)$ は次のように図示する：



同じ射を cut する場合（e.g. $\mathrm{Cut}(\varphi, \varphi)$ など）は、射の名前の右肩に番号を振り区別する (φ^1, φ^2)。

結合律により、どの順に interface をつないでも同じ射が得られることになる。

(9.4) 例

(9.4.a) 命題論理式の論理同値類を対象、$\overline{p} := \neg p$ とし、

$$\models p_1, \cdots, p_m \iff p_1 \vee \cdots \vee p_m \text{ はトートロジー}$$

と定め、cut は通常の cut

$$\models \Gamma, p, \models \Delta, \neg p \Rightarrow \models \Gamma, \Delta$$

とすると thin hypercategory となる。

(9.4.b) 集合 A の元を対象とし、$\overline{a} = a$ とする。射はサイクルのない対称グラフ 、その interface はその葉の全体、そして、各葉に A の元が型として対応付けられているとする。同じ型の２つの葉をつなぐ操作により cut が定義される。この操作で出来るグラフもサイクルを持たないことは明らか。

(9.4.c) 対象はただ一つとする。有限集合 B に対して、体 K 上の線形空間 K^B の部分空間であって、どの射影 $\pi_b : K^B \to K$ によっても K 全体に写されるようなもの φ を射とする。$\partial\varphi := B$ と定義する。$\partial\varphi_i = B_i$ $(i = 1,\ 2)$ とするとき、

$$\mathrm{Cut}_{b_1,b_2}(\varphi_1, \varphi_2) := \{\ \delta_{b_1}\mathbf{x} \times \delta_{b_2}\mathbf{y} \mid \exists k \in K\, [\mathbf{x}[k/x_{b_1}] \in \varphi_1, \mathbf{y}[k/y_{b_2}] \in \varphi_2]\ \}$$

ただし、$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, $\delta_b\mathbf{x}$ は b 成分を除いたベクトルを表し、$\mathbf{x}[k/x_b]$ は $\mathbf{x}$ の b 成分を k で置き直したベクトルを表す。

参考文献

[1] Barr, M.,*-Autonomous categories and linear logic. Mathematical Structures in Computer Science, 1:159–178, 1991. (`ftp://triples.math.mcgill.ca/pub/barr/staracll.tex`)

[2] Cockett, J.R.B. and Seely, R.A.G.,Weakly distributive categories. In Applications of Categories in Computer Science, London Mathematical Society Lecture Note Series 177, (ed. Fourman, M.P. et al), 45–65, 1992.
(ftp://triples.math.mcgill.ca/pub/rags/wk_dist_cat/wdc.ps.gz)

11. Matroid

独立性と従属性は、システムを構成する諸要素間関係についての基本概念の一対として普遍的に言及されるが、その意味は多様である。例えば、関数関係においては変数の従属性が一次的概念で、独立性は二次的に定義されるのに対して、確率変数では独立性が一次的な概念としてとらえられる。

多成分系のコヒーレンスの数学的表現の中で、従属性を主体としたものがdeductive hypedigraph で与えられる。この表現法では、独立性概念は派生的に定義されるが、この独立性を用いて、従属性概念が規定できるわけではない。

matroid は特殊な deductive hyperdigraph であるが、独立性と従属性とが互いに相手を定めており、数学的構造として深さと広さを兼ね備えていて現在も離散数学の広い分野で中心的なテーマ・道具の一つとなっている。

(11.1) 定義　　有限集合 S とその部分集合族 $\mathcal{I}$ が次の三条件を満たすとき 対 $(S,\mathcal{I})$ を **matroid** と呼ぶ：

- **(I1)** $\emptyset \in \mathcal{I}$,
- **(I2)** $X \in \mathcal{I}$ ならば、X の部分集合は $\mathcal{I}$ に属す,
- **(I3)** U, V が $\mathcal{I}$ に属し、U の個数が V の個数より大きければ、$V \cup \{ x \} \in \mathcal{I}$ となるような要素 $x \in U \setminus V$ が存在する。

(11.2) 基本概念　　以下 $M = (S,\mathcal{I})$ を matroid とする。

(11.2.a) $\mathcal{I}$ の元を独立集合、$\mathcal{I}$ に属さない部分集合を 従属集合と呼ぶ。
$\mathcal{I}$ に包含関係による順序を入れたとき、極大な元を M の 基底と呼ぶ。基底の全体を $\mathcal{B}(M)$ と書く。

(11.2.b) 階数　　matroid の 階数写像 $\rho : \mathbf{pow}\,(S) \rightarrow \mathbf{N}$ を次式で定義する：

$$\rho A := \max \{ \, |X| \mid X \in \mathcal{I} \bigcap \mathbf{pow}\,(A) \, \} \quad (A \subset S).$$

$\rho M := \rho S$ を matroid M の階数と呼ぶ。定義より、

$$X \in \mathcal{I} \iff \rho X = |X|.$$

定理.　　ρ は **submodular function** となる、すなわち、

$$\rho(X \cup Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) - \rho(X \cap Y)$$

が任意の $X, Y \subset S$ について成立する。
(証明の概略) $X \cap Y$ の中の極大な独立集合 Z_{12} をとる。次に、これを含む X の中の極大な独立集合を $Z_{12} \coprod Z_1$ とする。最後に、これを含む $X \cup Y$ の中の極大独立集合を $Z_{12} \coprod Z_1 \coprod Z_2$ $(Z_2 \subset Y \setminus X \cap Y)$ とする。すると $|Z_1| + |Z_{12}| = \rho X$ かつ、$|Z_2| + |Z_{12}| \leq \rho Y$ となるので

$$\begin{aligned}\rho(X \cup Y) &= |Z_1| + |Z_2| + |Z_{12}| \\ &= |Z_1 \coprod Z_{12}| + |Z_2 \coprod Z_{12}| - |Z_{12}| \\ &\leq \rho X + \rho Y - \rho(X \cap Y)\end{aligned}$$

逆に、submodular function の概念に基づいて matroid を定義することも可能である。
定理　　$\rho : \mathbf{pow}\,(S) \to \mathbf{N}$ が三条件

(R1) $\rho\emptyset = 0$,

(R2) $\rho X \leq |X|$,

(R3) ρ は submodular function,

を満たすとき、

$$\mathcal{I} := \{\ X \mid \rho X = |X|\ \}$$

は matroid となり、その階数写像はちょうど ρ となる。
(証明の概略) $|X| = \rho X < |Y| = \rho Y$ とする。ある $y \in Y$ について $\rho(X \cup y) = |X| + 1$ を示せばよい。背理法で示す。$\forall y \in Y[\rho(X \cup y) = |X|]$ とする。このとき、$\rho(X \cup Z) = \rho(X)$ が $Z \subset Y$ について成り立つことが $|Z|$ についての帰納法で示せる：$Z_1, Z_2 \subset Y$ が互いに素であるとき

$$\begin{aligned} \rho X &\leq \rho(X \cup Z_1 \cup Z_2) \\ &\leq \rho(X \cup Z_1) + \rho(X \cup Z_2) - \rho X \\ &= \rho X + \rho X - \rho X = \rho X. \end{aligned}$$

すると $\rho Y \leq \rho(X \cup Y) = \rho X$ となってしまい矛盾。

また、このように定義された matroid の階数写像を ρ' とするとき $\rho'(A) = n$ ならば $|X| = \rho(X) = n$ となる X があるが、どの $a \in A$ についても $|X| + 1 > \rho(X \cup a)$ となるので、上と同様に、$\rho(A) = \rho(X) = n = \rho'(A)$ となる。

(11.2.c) 一般の submodular function の定める matroid　　$\mu : \mathbf{pow}\,(S) \to \mathbf{N}$ が submodular で $\mu\emptyset = 0$ であるとき

$$\mathcal{I}(\mu) := \{\ X \mid \mu C \geq |X \cap C| \forall C \subset S\ \}$$

は matroid となり、その階数写像 ρ は

$$\rho X = \inf_C (\mu C + |X \setminus C|)$$

となる。
(証明の概略) $\nu X := \inf_C(\mu C + |X \setminus C|)$ とおくと、ν は明らかに $\nu X \leq |X|$ を満たす。さらに ν は submodular である。実際

$$\begin{aligned} \nu X + \nu Y &= \inf_{A,B} \{\mu X + |X \setminus A| + \mu Y + |Y \setminus B|\} \\ &\geq \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + |X \cup Y \setminus (A \cup B)| + |X \cap Y \setminus (A \cap B)| \\ &\geq \nu(X \cup Y) + \nu(X \cap Y) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} |X \setminus A| + |Y \setminus B| &= |X \cup Y \setminus (A \cup B)| + |X \cap Y \setminus (A \cap B)| \\ &\quad + |X \cap B \setminus (A \cup Y)| + |Y \cap A \setminus (B \cup X)| \end{aligned}$$

を用いた。したがって、$\{\ X \mid \nu X = |X|\ \} = \mathcal{I}(\mu)$ は matroid となる。

(11.2.d) 閉作用素　matroid M に対して、$\vdash_M \subset$ **pow** $(S) \times S$ を

$$\Gamma \vdash_M s \iff \rho(\Gamma \cup \{ s \}) = \rho\Gamma$$

と定義する。

定理.　$\vdash_M$ は deductive hyperdigraph となる、すなわち、

(i) $X \vdash_M x \quad \forall x \in X$,

(ii)

$$X \vdash_M a, \quad Y \cup \{ a \} \vdash_M b \Rightarrow X \cup Y \vdash_M b.$$

(証明の概略) まず

補題 1.　$\rho(X \cup y) = \rho X$ ならば、X を含む任意の集合 Z に対して $\rho(Z \cup y) = \rho Z$.

証明：$(X \cup \{ y \}) \cap W = \emptyset$ のとき、

$$\rho(X \cup W) \leq \rho(X \cup W \cup y) \leq \rho(X \cup y) + \rho(X \cup W) - \rho X = \rho(X \cup W).$$

$X \vdash a$,$Y \cup a \vdash b$ とする。すなわち $\rho(X \cup a) = \rho X$ かつ $\rho(Y \cup a \cup b) = \rho(Y \cup a)$ とする。補題より

$$\begin{aligned} \rho(X \cup Y) &\leq \rho(X \cup Y \cup b) \\ &\leq \rho(X \cup Y \cup a \cup b) \\ &= \rho(X \cup Y \cup a) \\ &= \rho(X \cup Y). \end{aligned}$$

したがって $X \cup Y \vdash b$ となる。　□

このことから

$$C_M(X) := \{ s \in S \mid X \vdash_M s \}.$$

で定義される写像 C_M : **pow** $(S) \rightarrow$ **pow** (S) は閉作用素 となる、すなわち、

(CL1) $X \subset C_M(X)$,

(CL2) $X \subset Y$ ならば $C_M(X) \subset C_M(Y)$,

(CL3) $C_M(C_M(X)) = C_M(X)$,

が成り立つ。さらに

(CL4) $y \in C_M(X \cup \{ x \}) \setminus C_M X \Rightarrow x \in C_M(X \cup \{ y \})$,

も成り立つ。

$C_M(X) = X$ となる集合 X を閉集合という。閉集合を用いて独立性を特徴付けることもできる：すなわち X が独立であるためには、$\{ X \cap Y \mid Y$ は閉集合 $\} =$ **pow** (X) となることが必要十分である。

閉集合の全体は S 上の **topped intersection structure** となる。これは、包含関係による順序による順序集合として geometric lattice となる、すなわち、semimodular lattice でありかつ、どの元もアトムの和で書ける。ただし、seminodular lattice とは,x, y が $x \wedge y$ の直後の元であれば、$x \vee y$ は x, y の直後元であることをいう。また、アトムとは最小元の直後の元のことをいう。逆に geometric lattice は適当な matroid の閉集合全体の lattice となることがしられている。

(11.2.e) circuit　極小な従属集合を circuit と呼ぶ。circuit の全体を $\mathcal{C}$ と書くと、この部分集合族は次の性質を満たす：

(C1) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ が違えば $C_1 \not\subset C_2$,

(C2) 異なる $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ が共通元 x を持てば、$C \subset C_1 \cup C_2 \setminus \{ x \}$ を満たす $C \in \mathcal{C}$ が存在する。

(C2) の証明：背理法による。$C_1 \cup C_2 \setminus \{ x \}$ が circuit を含まないとすると独立である。したがって、

$$\rho(C_1 \cup C_2 \setminus x) = |C_1 \cup C_2 \setminus x| = |C_1 \cup C_2| - 1.$$

$C_1 \cup C_2$ は従属集合、$C_1 \cap C_2$ は独立集合だから

$$\begin{aligned} |C_1 \cup C_2| - 1 &= \rho(C_1 \cup C_2 \setminus x) \\ &= \rho(C_1 \cup C_2) \\ &\le \rho C_1 + \rho C_2 - \rho(C_1 \cap C_2) \\ &\le |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - |C_1 \cap C_2| = |C_1 \cup C_2| - 2 \end{aligned}$$

となり矛盾。

なお、$(C1-2)$ から $(C2)$ より強い次の条件が導かれる。(cf. [Welsh p24])

(C2') 異なる $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ が共通元 x を持てば、任意の $y \in C_1 \setminus C_2$ に対して y を含みかつ $C \subset C_1 \cup C_2 \setminus \{ x \}$ を満たす $C \in \mathcal{C}$ が存在する。

S の部分集合 X が独立なこと circuit を含まないことは同値であることは容易に示される。実は、circuit の概念に基づいて matroid を定義することもできる：

定理　$(C1, 2)$ を満たす集合族 $\mathcal{C} \subset \mathbf{pow}\ (S)$ があるとき、

$$\mathcal{I} := \{ X \subset S \mid \mathbf{pow}\ (S) \cap \mathcal{C} = \emptyset \}$$

とおくと、$(S, \mathcal{I})$ は matroid となり、その circuit の全体が丁度 $\mathcal{C}$ となる。

(証明の概略) $X, Y \in \mathcal{I}$ で $|X| < |Y|$ とする。もしも、どの $y \in Y$ についても $X \cup y \notin \mathcal{I}$ である場合、各 $y \in Y$ に対して $C_y \in \mathcal{C}$ が存在して $C_y \subset X \cup y$ かつ、$y \in C_y$。$X \cap C_y$ の部分を順次「消去」していくと、最終的に、Y の中の $\mathcal{C}$ の元が作れてしまうので矛盾。

(11.3) 例

(11.3.a) 線形 matroid　線形空間 V の部分集合 S にたいして $\mathcal{I} := \{ B \mid B$ は一次独立 $\}$ とおくと、$(S, \mathcal{I})$ は matroid となる。

(11.3.b) グラフ matroid　(V, E) を対称グラフとするとき、$\mathcal{C} := \{ C \mid C$ は極小サイクル $\}$ は、matroid の circuit の集まりとなる。

(11.4) matroid の演算　M, M_1, M_2 を matroid とする。

(11.4.a) 制限　部分集合 $T \subset S$ に対して

$$M|T := (T, \mathcal{I} \cap \mathbf{pow}\ (T))$$

は matroid となる。これを部分集合 T への制限と呼ぶ。$M|T$ の階数写像は M の階数写像の $\mathbf{pow}\ (T)$ への制限である。

(11.4.b) contraction　部分集合 $T \subset S$ に対して

$$M.T := (T, \{ X \subset T \mid X \cup B \in \mathcal{I} \text{ となる } M|(S \setminus T) \text{ の基底 } B \text{ が存在する } \},$$

は matroid となる。これを部分集合 T への **contraction** と呼ぶ。$M.T$ の階数写像 ρ^T は

$$\rho^T(A) = \rho(A \cup (S \setminus T)) - \rho(S \setminus T).$$

(11.4.c) 和　$M_i = (S, \mathcal{I}_i)$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、

$$M_1 + M_2 := (S, \{\ X_1 \cup X_2 \mid X_i \in \mathcal{I}_i\ (i = 1,\ 2)\ \})$$

は matroid となる。階数写像は

$$\rho A = \min_{B \subset A} \{\rho_1 B + \rho_2 B + |A \setminus B|\}$$

で与えられる。

(11.4.d) 双対

$$M^* := (S, \{\ X \mid X \cap B = \emptyset \text{ となる基底 } B \text{ が存在する } \}$$

は matroid となる。$\{\ S \setminus B \mid B \in \mathcal{B}_M\ \}$ は M^* の基底となる。したがって、$M^{**} = M$ となる。M^* の階数 ρ^* は次の式を満たす:

$$\rho^*(S \setminus A) = (|S| - \rho S) - (|A| - \rho A).$$

参考文献

[1] D.J.A. Welsh. Matroid Theory. Academic Press, London 1976 (ISBN:0 12 744050 X).

[2] W.T. Tutte. Introduction to the Theory of Matroids. American Elsevier, New York 1970.

今日の予定

- マトロイドの合成
- hypercategory with matroid interface

(11.4) matroid の演算　　M, M_1, M_2 を matroid とする。

(11.4.a) 制限　　部分集合 $T \subset S$ に対して

$$M|T := (T, \mathcal{I} \cap \mathbf{pow}\ (T))$$

は matroid となる。これを部分集合 T への制限と呼ぶ。$M|T$ の階数写像は M の階数写像の $\mathbf{pow}\ (T)$ への制限である。

(11.4.b) contraction　　部分集合 $T \subset S$ に対して

$$M.T := (T, \{\ X \subset T \mid X \cup B \in \mathcal{I} \text{ となる } M|(S \setminus T) \text{ の基底 } B \text{ が存在する } \},$$

は matroid となる。これを部分集合 T への **contraction** と呼ぶ。$M.T$ の階数写像 ρ^T は

$$\rho^T(A) = \rho(A \cup (S \setminus T)) - \rho(S \setminus T).$$

(11.4.c) マトロイドの直和　　$S_1 \coprod S_2$ 上で $\{\ A_1 \coprod A_2 \mid A_i \in \mathcal{I}_i\ (i = 1,\ 2)\ \}$ はマトロイドの独立集合族となる。これを $M_1 + M_2$ と書く。

(11.4.d) bipartite graph によるマトロイドの誘導　　bipartite graph $(S \coprod T, \Delta \subset S \times T \cup T \times S)$ があるとき、S 上のマトロイド M から T 上のマトロイド $\Delta(M)$ を構成できる、すなわち

$$(T, \{\ Y \mid \exists f : Y \to S [\forall x \in X [f x \Delta x] \wedge f_* Y \in \mathcal{I}_M \wedge f \text{ は単射 } \})$$

はマトロイドとなる。ただし、$\Delta J := \{\ s \in S \mid \exists j \in J [s \Delta j]\ \}$.
証明 $\mathbf{pow}\ T \ni J \mapsto \mu J := \rho \Delta J$ は submodular. 実際、

$$\begin{aligned} \Delta(J_1 \cup J_2) &= \Delta J_1 \cup \Delta J_2 \\ \Delta(J_1 \cap J_2) &\subset \Delta J_1 \cap \Delta J_2 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \mu(J_1 \cup J_2) &= \rho(\Delta J_1 \cup \Delta J_2) \\ &\leq \rho \Delta J_1 + \rho \Delta J_2 - \rho(\Delta J_1 \cap \Delta J_2) \\ &\leq \rho \Delta J_1 + \rho \Delta J_2 - \rho \Delta(J_1 \cap J_2) \\ &= \mu J_1 + \mu J_2 - \mu(J_1 \cap J_2) \end{aligned}$$

従って、$\{\ J \subset T \mid \rho \Delta J \geq |J|\ \}$ はあるマトロイドの独立集合族となる。**Rado** の定理 によりこれは丁度 ΔM と一致する。

(11.4.e) 和　$M_i = (S, \mathcal{I}_i)$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、

$$M_1 \vee M_2 := (S, \{\ X_1 \cup X_2 \mid X_i \in \mathcal{I}_i\ (i = 1,\ 2)\ \})$$

は matroid となる。階数写像は

$$\rho A = \min_{B \subset A} \{\rho_1 B + \rho_2 B + |A \setminus B|\}$$

で与えられる。

証明　$S \coprod S$ と S の間の自明な bibartitie graph を Δ とすると、$M_1 \vee M_2 = \Delta(M_1 + M_2)$
.

(11.4.f) 双対

$$M^* := (S, \{\ X \mid X \cap B = \emptyset \text{ となる基底 } B \text{ が存在する }\ \}$$

は matroid となる。$\{\ S \setminus B \mid B \in \mathcal{B}_M\ \}$ は M^* の基底となる。したがって、$M^{**} = M$ となる。M^* の階数 ρ^* は次の式を満たす:

$$\rho^*(S \setminus A) = (|S| - \rho S) - (|A| - \rho A).$$

証明 $\lambda A := |A| + \rho(S \setminus A) - \rho S$ とおく。$A \mapsto |A| - \rho S$ は modular、$A \mapsto \rho(S \setminus A)$ は summodular なので、λ も submodular となる。また $A \subset B$ のとき、

$$\begin{aligned}\rho(S \setminus A) &= \rho((S \setminus B) \cup (B \setminus A)) \\ &\leq \rho(S \setminus B) + \rho(B \setminus A) \\ &\leq \rho(S \setminus B) + |B \setminus A|\end{aligned}$$

従って、

$$|A| + \rho(S \setminus A) \leq |B| + \rho(S \setminus B)$$

となり、λ は非減少となる。また $\lambda A \leq |A|$ は明か。故に λ はあるマトロイドの階数写像となる。最後に

$$\lambda A = |A| \iff \rho(S \setminus A) = \rho A \iff S \setminus A \text{ は基底を含む}.$$

(11.4.g) 交わり　$M_1 \wedge M_2 := (M_1^* \vee M_2^*)^*$ は、

$$(\{\ X_1 \cap X_2 \mid X_i \text{ は } M_i \text{ の基底を含む } (i = 1,\ 2)\ \}, \subset)$$

の極小元を基底とするマトロイドとなる。

(11.4.h) 貼合わせ　M_i $(i = 1,\ 2)$ を matroid とし、$\kappa_i : T \to S_i$ $(i = 1,\ 2)$ を単射とする。S_i $(i = 1,\ 2)$ の κ による張り合わせを $S := S_1 \cup_\kappa S_2 := S_1 \coprod S_2 / \kappa_1 t \sim \kappa_2 t$ とし、S_i を S の部分集合とみなす。このとき、M_i の κ による張り合わせ $M_1 \cup_\kappa M_2$ が、S 上のマトロイドとして次のように定義される：$M_i' := M_i + P_i$ を S_i 上のマトロイド M_i の S 上への拡大とする、ただし、P_i は $S \setminus S_i$ 上の自由マトロイド、すなわち任意の部分集合を独立集合とするマトロイドを表す。そして、

$$M_1 \cup_\kappa M_2 := M_1' \wedge M_2'$$

と定義する。交わりの定義より、$X_i \subset S_i$ が M_i の基底を含む集合を動くときに

$$(X_1 \setminus S_2) \cup (X_2 \setminus S_1) \cup (X_1 \cap X_2 \cap S_1 \cap S_2)$$

が成す集合族の包含関係に関する極小元が基底となる。

(11.4.i) 貼り合わせと隠ぺい　前節の $M_1 \cap_\kappa M_2$ を $S\setminus(S_1 \cup S_2)$ に制限したものを $M_1\Delta_\kappa M_2$ と書く。

(11.4.j) 例

(11.4.j.i) $S_1 = \{\ 1,2,3\ \}$,$S_2 = \{\ 3,4,5\ \}$, $M_1 := U_1(S_1)$, $M_2 := U_2(S_2)$ とする。このとき、

	基底
M_1	$\{\ 1,2,3\ \}$
M_2	$\{\ 34,35,45\ \}$

従って、これらより

	1	2	3
34	14	24	34
35	15	25	35
45	145	245	45

となり、$M_1 \cup_{\{\ 3\ \}} M_2$ の基底は $\{\ 14,15,24,25,34,35,45\ \}$ となる。
また、これより $M_1\Delta_{\{\ 3\ \}}M_2$ の基底は $\{\ 14,15,24,25,45\ \}$ となる。長さ 2 の circuit は 12 のみ。

(11.4.j.ii) $S_1 = \{\ 1,2,3\ \}$,$S_2 = \{\ 2,3,4\ \}$, $M_1 := U_1(S_1)$, $M_2 := U_2(S_2)$ とする。このとき、

	基底
M_1	$\{\ 1,2,3\ \}$
M_2	$\{\ 23,24,34\ \}$

従って、これらより

	1	2	3
23	1	2	3
24	14	24	4
34	14	4	3

となり、$M_1 \cup_{\{\ 2,3\ \}} M_2$ の基底は $\{\ 1,2,3,4\ \}$ となる。
また、これより $M_1\Delta_{\{\ 2,3\ \}}M_2$ の基底は $\{\ 1,4\ \}$ となる。

(11.4.j.iii) $S_1 = \{\ 1,2,3\ \}$,$S_2 = \{\ 2,3,4\ \}$, $M_1 := U_1(S_1)$, $M_2 := U_1(S_2)$ とする。このとき、

	基底
M_1	$\{\ 1,2,3\ \}$
M_2	$\{\ 2,3,4\ \}$

従って、これらより

	1	2	3
2	1	2	$\emptyset$
3	1	$\emptyset$	3
4	14	4	3

となり、$M_1 \cup_{\{\ 2,3\ \}} M_2$ は $\emptyset$ を基底とするので階数 0 となる。また、これより $M_1\Delta_{\{\ 2,3\ \}}M_2$ も階数 0 となる。

(11.4) 補足　S 上の個数が k 個以下の部分集合全体はマトロイドを決める。これを階数 k の一様マトロイドといい $M_k(S)$ と書く。$M_{|S|}(S)$ を自由マトロイドという。

12. hypercategory with matroid interface

(12.1) $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ は次の条件を満たすとき *hypercategory* であるという。

H1 $\mathcal{H}_0$ は対象の集まりで、involution τ を持つ。$\overline{a} := \tau a$ と書く。

H2 $\mathcal{H}_1$ は射の集まりで、各射には matroid $\partial\varphi = (|\partial\varphi|, \mathcal{I}_{\partial\varphi})$ と、型写像 $|\partial\varphi| \ni \alpha \mapsto [\alpha] \in \mathcal{H}_0$ が対応している。

H3 射 φ と、マトロイド同型 $\sigma : \partial\varphi \to M$ に対して、次のような射 $\sigma.\varphi$ が存在する

- $\partial(\sigma.\varphi) = M,$
- $[\sigma\alpha] = [\alpha] \quad$ for all $\alpha \in |\partial\varphi|.$

さらに、

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\partial\varphi}.\varphi &= \varphi \\ \sigma.(\tau.\varphi) &= (\sigma\tau).\varphi \end{aligned}$$

が成り立つ。

H4 各対象 a に対して、$\partial 1_a = U_1(\{1, 2\}),\ [1] = a, [2] = \overline{a}$ を満たす射 1_a が存在し、$(1,2).1_a = 1_{\overline{a}}$ を満たす。

H5 2つの射 $\varphi_i\ (i = 1,\ 2)$ と単射 $\kappa_i : T \to |\partial\varphi_i|\ (i = 1,\ 2)$ で

$$\forall t \in T. \overline{[\kappa_1 t]} = [\kappa_2 t]$$

を満たすものに対して cut と呼ばれる射 $\varphi_1 \circ_\kappa \varphi_2$ が存在し、

$$\partial(\varphi_1 \circ_\kappa \varphi_2) = \partial\varphi_1 \Delta_\kappa \partial\varphi_2$$

を満たし、タイプはもとのタイプを継承する。

これは次の４つの性質を持つ。

H6 cut は可換である、すなわち、自然な同型

$$\tau : \partial\varphi_1 \Delta_\kappa \partial\varphi_2 \to \partial\varphi_2 \Delta_\kappa \partial\varphi_1$$

について

$$\tau.\varphi_1 \circ_\kappa \varphi_2 = \varphi_2 \circ_\kappa \varphi_2.$$

H7 cut は　interface の名前の変換と整合的である。

H8 恒等射の性質

H9 結合法則

今日の予定

- hypercategory with matroid interface(続き)
- hypercategory with operations

(12.2) 射の併置　hypercategory の２つの射 φ_i $(i = 1,\ 2)$ に対して、mix 射 $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ が $\partial(\varphi_1 \otimes \varphi 2) := \partial\varphi_1 + \partial\varphi_2$ により定義される。mix として構成されたという経緯は、interface の matroid 構造にかなり忠実に記録されている。

(12.2) polycategory

(12.2.a) hypercategory with matroid interface $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ が polycategory であるとは、

$$\mathcal{H}_0 = A \coprod \overline{A}$$

であって、各射 φ について $\partial_{in}\varphi := \{\ a \mid [a] \in A\ \}$ 　は基底である。このとき

$$\overline{\partial_{in}\varphi} \supset \partial_{out}\varphi := \{\ a \mid [a] \in \overline{A}\ \}$$

である。

(12.2.b) 補題.　$I \subset \partial_{out}\varphi_1$ と全単射 $\kappa : I \rightarrow \partial_{in}\varphi_2$ に対して、matroid 合成 $\partial\varphi_1 \Delta_\kappa \partial\varphi_2$ は、

$$\partial_{in}\varphi_1 \cup \partial_{in}\varphi_2 \setminus \kappa I$$

を基底とする。とくに、階数は正となる。

(12.2.c) 問題.　上の補題を証明せよ。

(12.2.d) これにより、合成 $\varphi_1 \circ_\kappa \varphi_2$ が定義される。明らかに、

$$\partial_{in}(\varphi_1 \circ_\kappa \varphi_2) = \partial_{in}\varphi_1 \cup \partial_{in}\varphi_2 \setminus \kappa I$$

となる。

13. hypercategory with operations

(13.1) $(\Sigma, \{\, |\sigma| \mid \sigma \in \Sigma\,\})$ を matroid signature とする。すなわち、Σ は有限集合、で $|\sigma|$ は $\{\, 0, 1, 2, \cdots, n_\sigma \,\}$ 上の matroid 構造とする。

定数集合 $\mathcal{H}_0$ と matroid signature $\Sigma := (\Sigma, \{\, |\sigma| \,\})$ に対して、σ と $\overline{\sigma}$ を arity n_σ の作用素とみなして構成される項の全体を $\Sigma[\mathcal{H}_0]$ とかく。 この上に involution を

$$\overline{\sigma(t_1, \cdots, t_n)} := \overline{\sigma}(\overline{t_1}, \cdots, \overline{t_n})$$

と定義する。以下 $\{\, \sigma, \overline{\sigma} \,\}$ を Σ と書く。

hypercategory $(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ と **matorid signature** Σ から生成される **hypercategory** $\Sigma[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ とは、$\Sigma[\mathcal{H}_0]$ を対象とし、$\mathcal{H}_1$ と次の射を生成元とするものをいう：

$$\{\, \varphi[\sigma, t_1, \cdots, t_{n_\sigma}] \mid \sigma \in \Sigma, t_i \in \Sigma[\mathcal{H}_0] \,\}$$

ただし、t_i は項とし、これの interface matorid は $|\sigma|$ で、型は $[0] := \sigma(t_1, t_2, \cdots, t_{n_\sigma})$, $[i] := t_i$ となるものである。ここで，$|\overline{\sigma}| := |\sigma|^*$. これらの射を特殊射と呼ぶ。

(13.2) 特殊射と関係による hypercategory　　特殊射の間のいくつかの関係 $\mathcal{R}$ の生成する congruence relation による $\Sigma[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ の商を $\Sigma[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]/\mathcal{R}$ と書く。

(13.3) このあとの概略　　作用素と関係を適当に選ぶ事で、Milner の Action calculus や 乗法的線形論理の証明網や、geometry of interaction と同内容のものは hypercategory の枠組みで表現できると思われる。

また、インタフェースの構造化により相互作用を特化するという、相互作用記述の一般的な枠組みを hypercategory により与えられると思われる。

結語　　動的系としての複雑系の数学的記述の吟味をテーマとしたいくつかの枠組みを紹介したが、いずれも十分には議論できなかった。ことに、講義の過程で分散系の記述に不可欠と気付いた種々の「幾何学的な」枠組みの調査と吟味はほとんど手がつけられなかった。これは、今後の課題の一つとしたい。

レポートについて　単位の必要な人は講義資料にある問題の少なくとも一つを解く（試みをする）か、卒業研究あるいは大学院での研究テーマについて考察し、報告を提出せよ。後者の場合は１２００字～２０００字程度にまとめよ。（４年生とM２は）２月２３日１２時まで、M１は３月５日までに、４－４０３室に提出。

追加問題

[問題 15–1] 次数の小さいマトロイドを数え上げよ。

[問題 15–2] マトロイドの張り合わせをサーキットの言葉で与えよ。

[問題 15–3] 具体的なマトロイドの張り合わせを計算せよ。

[問題 15–4] 一般の deductive hyperdigraph の張り合わせ方法を考えよ。