

3 Baez-Dolan の高次元圏

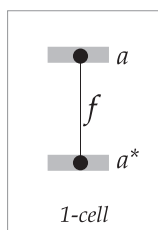
coherence condition の複雑化の壁に阻まれていた，弱高次元圏の定式化の問題は，Baez-Dolan による（射の合成概念自身の再検討に基づく）画期的な構想¹によって，収束しつつあるように思われる．以下，link の観点から Baez-Dolan の定義の再構成を試みる．link のなす operad は基本的な役割を果たすが，operad の概念自身は，最終的な定式化には不要となると思われる．²

3.1 link opetopic set

3.1.1 Metatree 図式と link 図式

作用素の作用素の作用素 .. というものを図示する方法として Baez-Dolan は Meta-tree という方法を補助的に使っている．ここでは，続く 2 段階の様子が明示的に表示できる図示法を例示する．

まず 1-cell となるべきものは

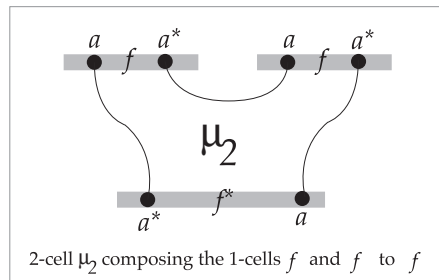


のように図示する．

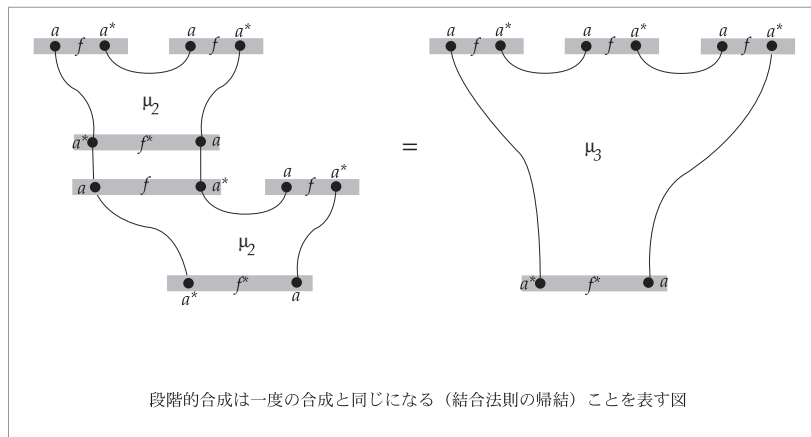
次に，1-cell 達の「合成」2-cell は，次のように図示される．

¹John C. Baez and James Dolan, Higher-Dimensional Algebra III: n -categories and the Algebra of Opetopes, preprint,
 (“<ftp://ftp.math.sci.hokudai.ac.jp/tujisita/doc/imported/op.ps>”)

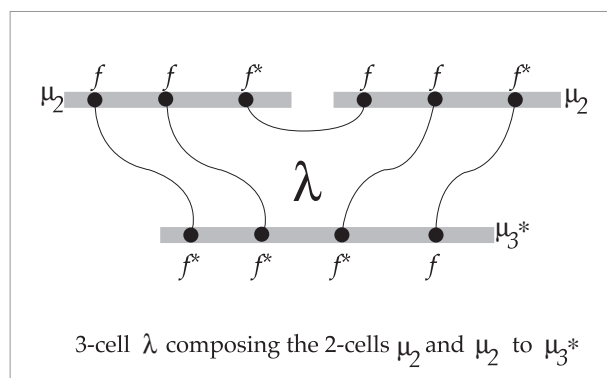
²この文書は<http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/lectures/am97/s3-am97.ps.gz>, [s3-am97.pdf](http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/lectures/am97/s3-am97.pdf)にある．



2-cell の「合成」については次のような等式がなりたつ．

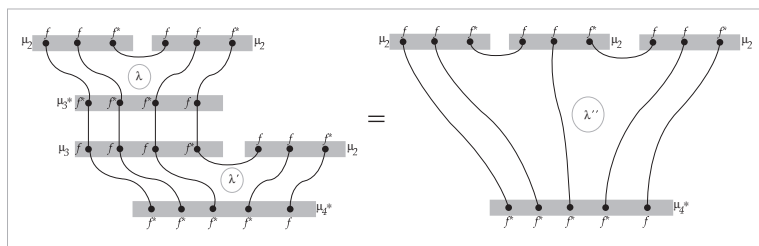


しかし，これは本当は「合成」3-cell により実現しており，これは次のように図示される．

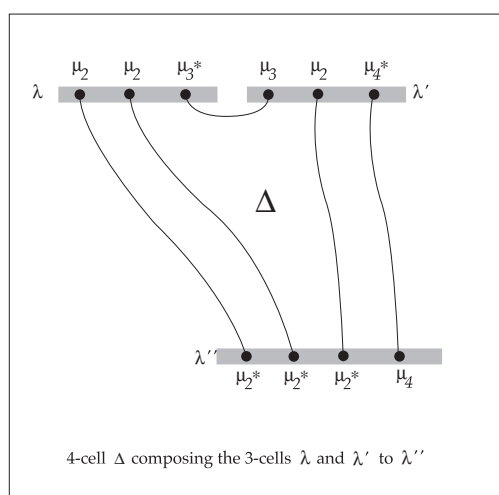


が対応する．

3-cell の「合成」についての等式



も次のような「合成」4-cell により実現している。



これらは，Baez-Dolan の metatree 図式では，図 3.1.1 のようになる。

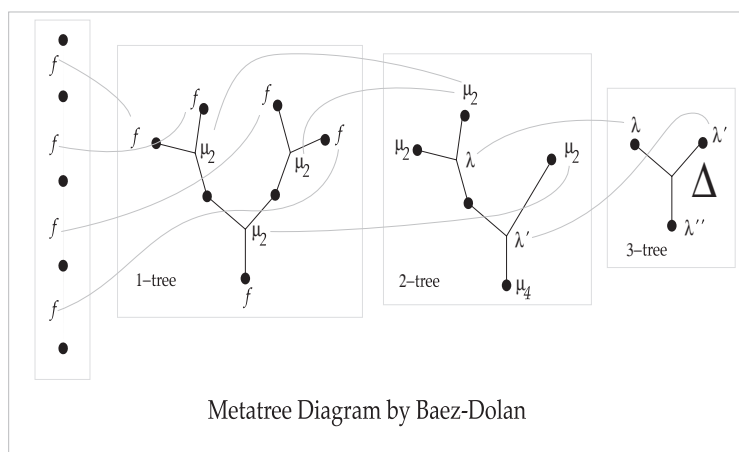


図 1: Baez-Dolan の metatree 図式

これは、リンク図式では図 3.1.1 のように表示される：

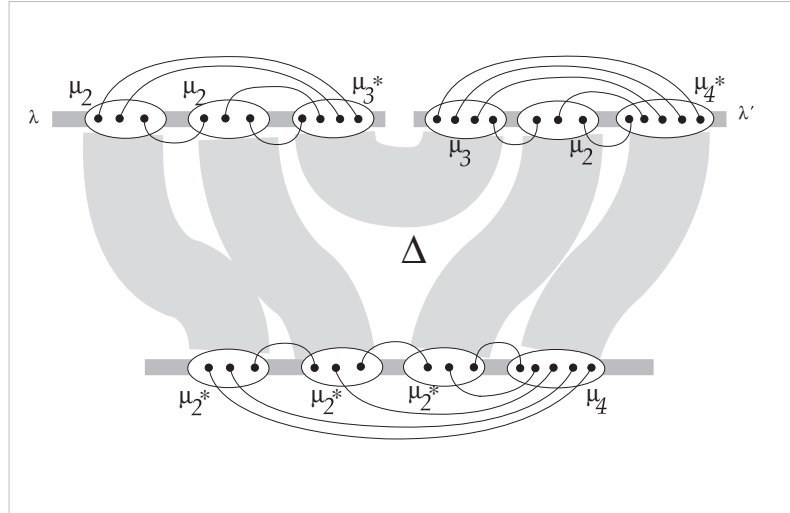


図 2: リンク図式

3.1.2 圏上の有限語の圏 $W^\omega \mathcal{C}$

Bij_f を有限集合と全単射の groupoid とする . 圏 $\mathcal{C}$ に対し

$$W^\omega \mathcal{C} := \text{elt}(\mathcal{CAT}(-, \mathcal{C}) : Bij_f^{op} \rightarrow \mathcal{CAT})$$

とおく , ただし , $w \in Bij_f$ に対し $\mathcal{CAT}(w, \mathcal{C})$ は w を離散圏と考えたときの
函手圏 . この圏は

- 対象は $w = \langle \partial_i w; i \in \text{Ind}(w) \rangle$, ただし $\text{Ind}(w)$ は有限集合で $\partial_i w$ は $\mathcal{C}$ 対象 .
- 射 $\langle \sigma, \langle g_j; j \in \text{Ind}(v) \rangle \rangle : w \rightarrow v$ は全単射 $\sigma : \text{Ind}(v) \rightarrow \text{Ind}(w)$ と射の族 $g_j : \partial_{\sigma j} w \rightarrow v_j (j \in \text{Ind}(v))$ の組 .

groupoid Bij_f は $W^\omega \mathcal{C}$ に右から作用する: $g : u \rightarrow u'$ が全単射のとき $\text{Ind}(w) = u'$ なる w に対して , $\text{Ind}(w.g) = u$ かつ $\partial_i w.g = \partial_{g_i} w$.

3.1.3 圏上の arity 圏 $W^{\omega,o}\mathcal{C}$

圏 $\mathcal{C}$ 上の arity 圏 $W^{\omega,o}\mathcal{C}$ を

$$W^{\omega,o}\mathcal{C} := W^{\omega}\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{op}$$

と定義する．この圏は

- 対象は $w = \langle \partial_i w; i \in \text{Ind}(w) \rangle$, ただし

$$\text{Ind}(w) = \text{Ind}^-(w) \oplus \text{Ind}^+(w)$$

$$(\text{Ind}^+(w) = \{o\}^3),$$

$$\partial_o w \in \mathcal{C}^{op},$$

$$\partial_i w \in \mathcal{C} \quad \text{for } i \in \text{Ind}^-(w).$$

- 射

$$\langle \sigma, \langle g_j; j \in \text{Ind}(v) \rangle \rangle : w \rightarrow v$$

は全単射 $\sigma : \text{Ind}(v) \rightarrow \text{Ind}(w)$ と射 $g_j : \partial_{\sigma j} w \rightarrow \partial_j v$ $j \neq o$ と $g_o : \partial_o v \rightarrow \partial_o w$ (向きに注意) の組．

この圏にも Bij_f が右から作用する: $g : u \rightarrow u'$ が全単射のとき $\text{Ind}^-(w) = u'$ なる w に対し $\text{Ind}^-(w.g) = u$ かつ $\partial_o w.g = \partial_o w$ かつ $\partial_j w.g := \partial_{g j} w$.

³この記号は w によらず, 意味がないように見えるが高次元 hypercategory では自明でない集合となる予定

3.1.4 involution とグラフ

分割と involution 集合 X の変換 $\tau : X \rightarrow X$ が *involution* であるとは $\tau^2 = 1_X$ を満たすことをいう。固定点のない involution を与えた集合は、対称グラフで、どの頂点もただ一つの辺の端点であるようなものと同一視できる⁴。固定点のない involution の全体を $\text{Inv}(X)$ と書く。

Δ を集合 X の分割

$$\Delta : X = \bigoplus_{i \in I_\Delta} X_i$$

とする。involution τ が分割 Δ と直交するとはすべての $i \in I_\Delta$ について

$$X_i \cap \tau X_i = \emptyset$$

となることをいう。このとき、 τ は明らかに固定点を持たない。また、すべての $i \in I_\Delta$ について

$$\tau X_i \subseteq X_i$$

となるとき τ は 分割 Δ を保つという。

I_Δ の上に対称グラフの構造 $G(\Delta, \tau)$ が $X_i \cap \tau X_j \neq \emptyset$ となる $\langle i, j \rangle$ を辺とすることにより定まる。これを τ の誘導するグラフという。 τ が Δ と直交するということは、このグラフがループを持たないことに他ならない。

一般に、対称なグラフ $G = \langle V, E \rangle$ のいくつかの頂点の集合 W が独立であるとは

$$\langle W, E \cap (W \times W) \rangle, \quad \langle W^c, E \cap (W^c \times W^c) \rangle$$

が共にサーキットを持たないことをいう。

X の固定点を持たない involution τ と分割 Δ について $i \in I_\Delta$ が末端型であるとは、 $\{i\}$ がグラフ $G(\Delta, \tau)$ で独立であることをいう。これは、このグラフから i 及び i を端点とする辺を除いて出来るグラフがサーキットを持たないことを意味する。

リンクによるリンクの合成 前節と同様に、 τ は X の involution で 分割 Δ と直交するとする。末端型添字 $i \in I_\Delta$ に対し写像

$$\begin{aligned} \text{Comp}(\tau, -) : \prod_{j \neq i} \text{Inv}(X_j) &\rightarrow \text{Inv}(X_i), \\ \langle \sigma_j; j \neq i \rangle &\mapsto \text{Comp}(\tau, \langle \sigma_j; j \neq i \rangle) \end{aligned}$$

⁴Eilenberg and Kelly, A generalization of the Functorial Calculus, Journal of Algebra, 3, 366-375 (1966), で dinatural transformaton の一般的記述に同様のグラフを導入している。

が次のように定義できる: $\sigma_j \in \text{Inv}(X_j)$ ($j \neq i$) であるとき, $\langle x, \tau x \rangle$ と $\langle x, \sigma_j x \rangle$ ($x \in X, j \neq i$) を辺とする グラフは X_i 以外の頂点では次数がすべて 2 で, X_i 上では次数が 1 である. したがって, X_i の点 x を端点とする鎖のもう一つの端点 y は X_i にある. このとき

$$\sigma_i x = y$$

とおくことにより X_i 上の involution σ_i が定まる. これを τ による σ_j ($j \neq i$) の合成という.

圏にラベルを持つ集合のリンク 圏 $\mathcal{C}$ とその双対圏 $\mathcal{C}^{op}$ の対象によるラベル λ が X に与えられたとする. $\ell(\tau(x)) = \overline{\ell(x)}$ を満たす involution τ を ℓ -link といいその全体を $\mathcal{L}(X, \ell)$ と書く, ただし, $\overline{A}$ は A を相対圏の対象と見たものとする. ℓ -link は明らかに固定点を持たない.

さらに分割 Δ があるとき $\mathcal{L}(X, \ell, \Delta)$ により ℓ -link で Δ と直交するものの全体を表す. このときも $\tau \in \mathcal{L}(X, \ell, \Delta)$ はやはり

$$\text{Comp}(\tau) : \prod_{j \neq i} \mathcal{L}(X_j, \ell_j) \rightarrow \mathcal{L}(X_i, \ell_i)$$

を定める, ただし $\ell_j := \ell|_{X_j}$.

3.1.5 文の Link

一般に $(W^{\omega,o})^2\mathcal{C}$ の対象 w (これを $\mathcal{C}$ 上の文という) に対し w 上の link と呼ばれるものを定義し, その全体を $\mathcal{L}(w)$ と書く.

まず,

$$Ind^2(w) := \oplus_{i \in Ind(w)} Ind(\partial_i w)$$

とおき, この分割を $Ind^2(w)$ の標準分割という.

直和因子 $Ind(\partial_i w)$ から $Ind^2(w)$ への標準埋込による $j \in Ind(\partial_i w)$ の像を (ji) と書き

$$\partial_{ji} w = \partial_j \partial_i w \in \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}^{op}$$

とおく.

集合 $Ind^2 w$ には $\mathcal{C}$ または $\mathcal{C}^{op}$ の対象をラベルとするラベル付けが

$$(ij) \mapsto \partial_{ji} w$$

により定まる. これを $\partial_{\bullet\bullet} w$ と書く.

$Ind^2(w)$ の標準分割と直交する $\partial_{\bullet\bullet} w$ -link を単に w 上の link といい, その全体を $\mathcal{L}(w)$ と書く. $\sigma \in \mathcal{L}(w)$ は $Ind^-(w)$ の上に木の構造を定める.

対応 $w \mapsto \mathcal{L}(w)$ は関手

$$(W^{\omega,o})^2\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

を定める。

なお、関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は、関手

$$F : (W^{\omega,o})^2\mathcal{C} \rightarrow (W^{\omega,o})^2\mathcal{D}$$

を定める, さらに

$$F : \mathcal{L}(w) \rightarrow \mathcal{L}(Fw)$$

を定める。

3.2 Opetopic set

3.2.1 定義

圏の列 $\mathcal{A} = \{C_n^A \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ が **Opetopic sets** であるとは次のような条件をみたすことをいう (添え字 A を省略する) :

(0-cell) C_0 は離散圏.

(1-frame) $Fr_1 := W^{\omega, o}C_0$. この圏の対象を 1 次元の枠という .

(1-cell) C_1 はある関手 $Fr_1 \rightarrow Set$ の要素圏. 自然な射影 $C_1 \rightarrow Fr_1$ による f の像を $fr(f)$ とかく . 少し雑な書き方をすると

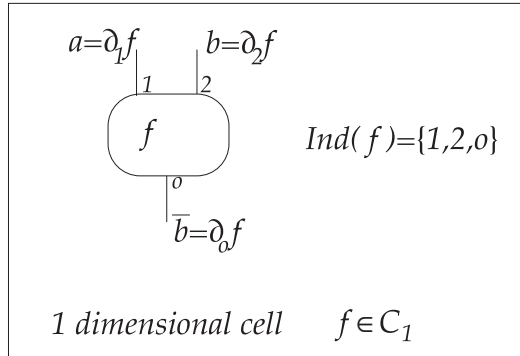
$$C_1 = \bigoplus_{B \in Fr_1} C_1(B),$$

$$\text{ただし } C_1(B) := \{f \mid fr(f) = B\}.$$

$$Ind(f) := Ind(fr(f)),$$

$$\partial_i f := \partial_i fr(f) \text{ for } i \in Ind(f),$$

たとえば $fr(f) = \langle a, b, \bar{a} \rangle$ のとき下のように書く .



(2-frame) Fr_2 は , 次のような対 $B = \langle w^B, \ell^B \rangle$ を対象とする圏.

- $w^B \in W^{\omega, o}C_1$.

$$Ind(B) := Ind(w^B),$$

とかく . $\partial : C_1 \rightarrow W^{\omega, o}C_0$ は

$$\pi : W^{\omega, o}C_1 \rightarrow (W^{\omega, o})^2 C_0$$

を引き起こすので, w^B はこれにより C_0 上の文を定める.

$$w^B = \langle \partial_i B; i \in \text{Ind}(B) \rangle,$$

と書けば, この文は

$$\pi B = \langle \partial \partial_i B; i \in \text{Ind}(B) \rangle$$

とかける. §3.1.5 の記号を用いると

$$\text{Ind}^2(B) := \text{Ind}^2(\pi w^B) = \oplus_{i \in \text{Ind}(B)} \text{Ind}(\partial \partial_i B).$$

$$\partial_{ji} B := \partial_j \partial_i B \in C_0.$$

- $\ell^B \in \mathcal{L}(\pi w^B)$, すなわち ℓ は $\text{Ind}^2(B)$ の $\partial_{\bullet\bullet} B$ -link. 定義より $\{o\}$ は独立である.

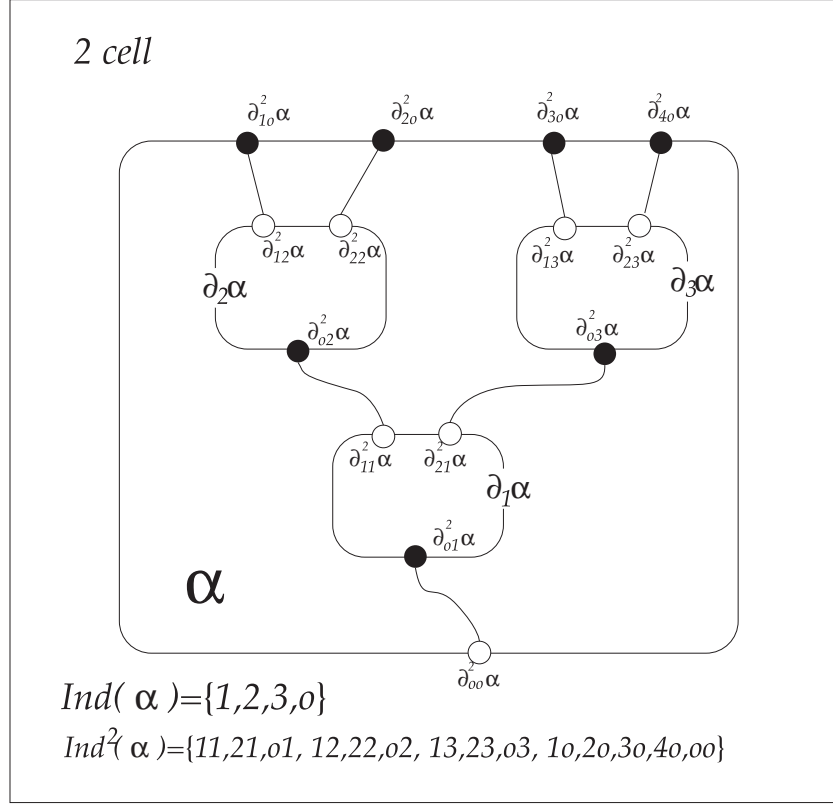
この圏 $\mathcal{F}r_2$ の対象を2次元枠という.

(2-cell) C_2 はある関手 $\mathcal{F}r_2 \rightarrow \text{Set}$ の要素圏とする:

$$C_2 = \bigoplus_{B \in \mathcal{F}r_2} C_2(B).$$

$\alpha \in C_2(B)$ であるとき α は B を枠とする 2-cell といい, 次のような記号を用いる:

$$\begin{aligned} \partial \alpha &:= w^B, \\ \partial_i \alpha &:= (\partial \alpha)_i, \quad i \in \text{Ind}(\partial \alpha) \\ \partial_{ji} \alpha &:= \partial_{ji} B, \quad (ji) \in \text{Ind}^2(\partial \alpha) \\ \ell_\alpha &:= \ell^B \end{aligned}$$



(n-frame) $n \geq 3$ とし, $m \leq n$ に対して $C_m, Fr_{m-1}, \partial : C_m \rightarrow Fr_{m-1}, \partial_i \alpha \in C_{m-1} (\alpha \in C_m)$ などすでに定義されているとする. Fr_n は, 次の pull-back で定義する.

$$\begin{array}{ccc} Fr_n & \longrightarrow & W^{\omega, o} C_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}C_{n-2} & \longrightarrow & (W^{\omega, o})^2 C_{n-2}. \end{array}$$

したがって, その対象である n -frame は次ような対 $B = \langle w^B, \ell^B \rangle$ となる.

- $w^B \in W^{\omega, o} C_{n-1}$.

$$Ind(B) := Ind(w^B),$$

とかく. $\partial : C_{n-1} \rightarrow W^{\omega, o} C_{n-2}$ が引き起こす

$$\pi : W^{\omega, o} C_{n-1} \rightarrow (W^{\omega, o})^2 C_{n-2}$$

による w^B の像は,

$$\pi w^B = \langle \partial \partial_i B; i \in Ind(B) \rangle.$$

$$Ind^2(B) := Ind^2(\pi B) = \oplus_{i \in Ind(B)} Ind(\partial \partial_i B),$$

$$\partial_{ji} B := \partial_j(B_i) \in C_{n-2}.$$

- $\ell^B \in \mathcal{L}(\pi w^B)$, すなわち ℓ^B は $Ind^2(B)$ の $\partial_{\bullet\bullet} B$ -link.
- $\{o\}$ は独立であるが,

$$Comp(\ell, \langle \ell_{\partial_i B}; i \in Ind^-(B) \rangle) = \ell_{\partial_o B}.$$

を満たす. ただし, $b \in C_{n-1}$ に対して ℓ_b は induction によって決まっている $\mathcal{LC}_{n-3}$ の元. この条件は $n \leq 2$ では不要だった.

図 3.2.1 と図 3.2.1 は同じ 3 cell を表している。

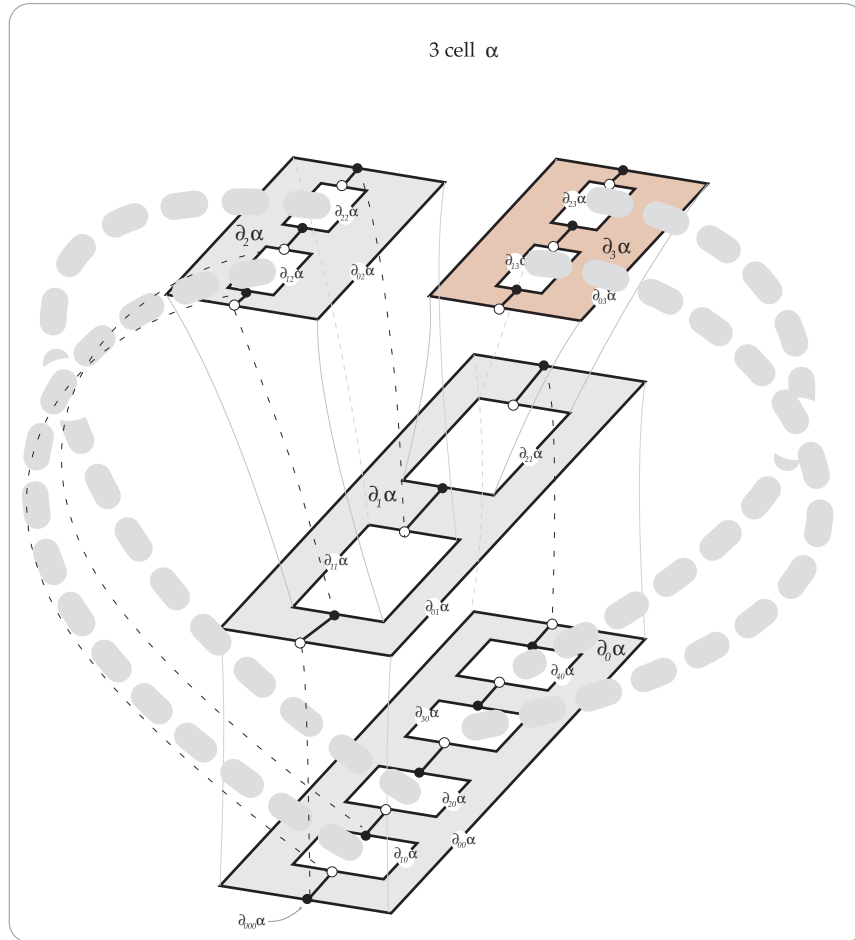


図 3: 結合の仕方を与える 3 胞 (ブロック図式)

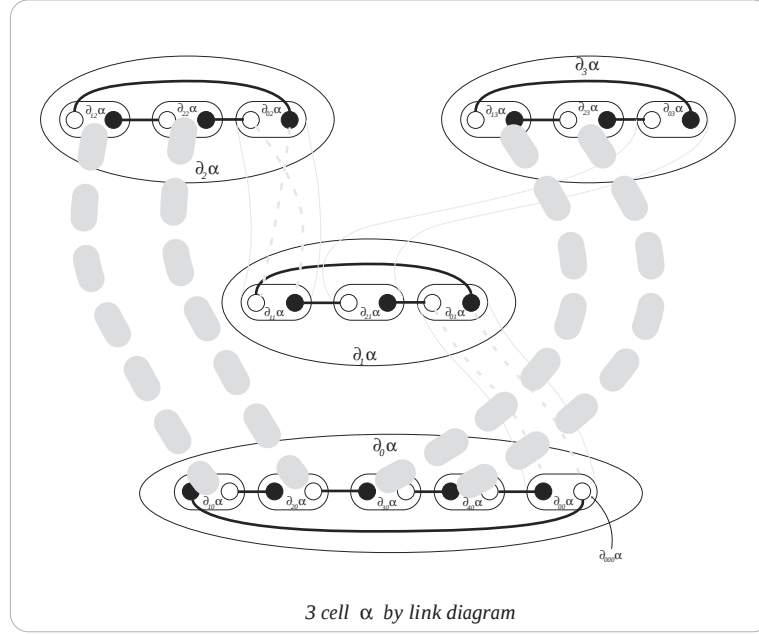


図 4: 結合の仕方を与える 3 胞 (リンク図式)

(n -cell) C_n はある関手 $Fr_n \rightarrow \text{Set}$ の要素圏. 従って, n -枠 B に対して, 集合 $C_n(B)$ が定まる. $\alpha \in C_n(B)$ であるとき α は B を枠とする n -cell といい,

$$\partial\alpha = w^B \in W^{\omega,o}C_{n-1}, \quad \ell_\alpha = \ell^B \in \mathcal{L}C_{n-2},$$

と書く.

$$\partial_i \alpha := \partial_i \partial \alpha \in C_2, \quad i \in \text{Ind}(\partial \alpha),$$

$$\partial_{ji} \alpha := \partial_{ji} \partial \alpha \quad (ji) \in \text{Ind}^2(\partial \alpha),$$

定義より

$$\text{Comp}(\ell_\alpha, \langle \ell_{\partial_i \alpha}; i \in \text{Ind}^-(\partial \alpha) \rangle) = \ell_{\partial_o \alpha}$$

がなりたつ.

3.2.2 骨格、niche

$n \geq 2$ のとき $\mathcal{L}C_{n-2}$ の元を n 次元骨格⁵という. $n = 0, 1$ のときは, n 次元骨格はただ一つあるとし, それを 0 と書く.

⁵Baez-Dolan では n -opening と呼ぶ

n -cell α , n -frame B , n -骨格 ℓ が

$$fr(\alpha) = B, \quad \ell^B = \ell$$

という関係にある時 B を ℓ -枠 といい、 $n \leq 1$ のときは $\ell^B = 0$ とする。 ℓ は α の骨格であるという。

$n \geq 2$ で ℓ が n 骨格であるとき、 ℓ 枠 B を

$$\ell[w^{B-} \xrightarrow{?} w_o^B]_n$$

とかく、 $Ind(\ell) = \{1, \dots, m, o\}$ であるときは

$$\ell[\partial_1 B, \dots, \partial_m B \xrightarrow{?} \partial_o B]_n$$

と書く。

ℓ が n 骨格、

$$w^- \in W^\omega C_{n-2}$$

$Ind(w^-) = Ind^-(\ell)$ のとき $\langle \ell, w^- \rangle$ を ℓ -niche といい、

$$\ell[w^- \xrightarrow{?} ?]_n$$

と書く。 $Ind^-(\ell) = \{1, \dots, m\}$ のときは

$$\ell[w_1, \dots, w_m \xrightarrow{?} ?]_n$$

と書く。

n 骨格 ℓ に対し、

$$w^- \in W^\omega C_{n-2}$$

$Ind(w^-) = Ind^-(\ell) \setminus i$ のとき $\langle \ell, w^-, i \rangle$ を i -punctured ℓ -niche といい、

$$\ell[w^-, ?/i \xrightarrow{?} ?]_n$$

とかく、 $Ind^-(\ell) = \{1, \dots, m\}$ のとき

$$\ell[w_1, \dots, w_{i-1}, ?, w_{i+1}, \dots, w_m \xrightarrow{?} ?]_n$$

とも書く。

このような隙間のある図式に対し、それを拡張する n -cell をその図式の住人という。同じ図の 2 住人は同居人であるという。

n 骨格 ℓ の niche

$$\ell[w^- \xrightarrow{?} ?]_n$$

に対し、その 2 同居人

$$\ell[w^- \xrightarrow{u_i} v_i]_n \quad i = 1, 2$$

があるとき、 $n-1$ cell v_1, v_2 は同じ $n-1$ 枠を持つことが示せる。これを $fr(\ell[w^-])$ と書く。

3.2.3 次元のシフト

一つの opetopic set $C = \{ C_n \mid n = 0, 1, 2, \dots \}$ があるとき、この次元をずらして新しい opetopic set

$$\Sigma^{-k}C := \{ C_k, C_{k+1}, \dots \}$$

を定義できる。

operad O を 1-weak category と考えたとき、 $\Sigma^{-1}O$ を O^+ と書き、これを slice operad という。例えば、 I^+ は

- $I_0^+ = \{ f \}$,
- $I_1^+ = \{ \mu_n : f^n \rightarrow f \}$, すなわち、各 n ごとに、 n 項演算がちょうどひとつずつある。

3.2.4 opetopic map

C, D を opetopic set とする。写像列 $f_n : C_n \rightarrow D_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ が opetopic map であるとは、どの $\alpha \in C_n$ についても $f_n \alpha$ の n -枠が α の枠の f による像と一致することをいう。

ここで、 n -枠は、 $n-1$ cell の word w とリンク ℓ からなるが、 f は C の n 枠 $\langle w, \ell \rangle$ を D の n 枠 $\langle fw, f\ell \rangle$ に次のように移す：

- $(fw)_i := f_{n-1}(w_i)$,
- $f\ell$ は f_{n-2} がひき起すもの。

3.2.5 opetopic set 上の opetopic set

opetopic map $C \rightarrow D$ があるとき、 C は D を土台としているという。

D が与えられたとき、 D を土台とする opetopic set を次元の小さい方から作れる。各次元の frame は D に移したとき D の frame となるものとして定義する。各 frame に棲む cell は自由にきめる。

3.2.6 modification of opetopic set

opetopic set $C = \{ C_i \mid i = 0, 1, 2, \dots \}$ と、写像 $\alpha : D \rightarrow C_n$ から、新しい opetopic set

$$C \times_{\alpha} D = \{ D_i \mid i = 0, 1, 2, \dots \}$$

を次のように構成できる。

- in ならば $D_i := C_i$,
- $D_n = D$,
- $k > n$ に対して、
 - $\widetilde{Fr}_k$ は $D_0, \dots, D_{k-1}$ からつくる frame.
 - $D_k = C_k \times_{Fr_k} \widetilde{Fr}_k$.

これは、 n -cell だけ D に変更し、後の構成は同じようにやっていく、というものである。

3.2.7 restriction of opetopic set

subset $D \subseteq C_n$ を一つ選ぶと、 D だけから構成される opetopic set が定まる。これを $C|_D$ を書く。

3.3 弱 n -圏

3.3.1 n -universal cells and n -balanced niches

自然数 n を固定する。 m -cell が n -universal であるということと、punctured m -niche が n -balanced であるということを、相互再帰的に次のように定める。(以下 n を省略して書く)

1. m -cell u が universal であるとは、

- $m > n$ であり、その niche 同居人は他にはないが、
- $m \leq n$ であり、 d の frame 同居人 d' について、図 1 $m+1$ -punctured niche が balanced であることをいう。

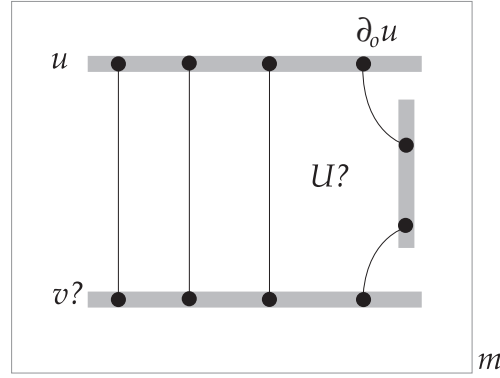


図 5: $m + 1$ punctured niche

2. 図 2 の $m + 1$ -punctured niche が balanced であるとは、

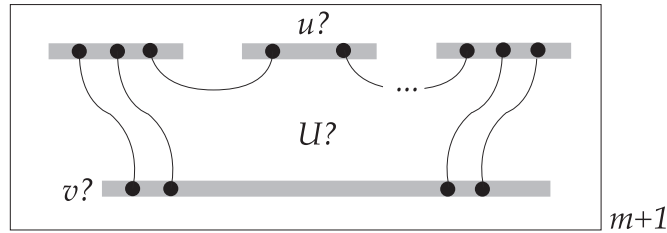


図 6: punctured niche

- $m > n + 1$ であり、 $v?$ の住人と、 $U?$ の universal な住人とが全単射に対応するか

- $m \leq n$ で
 - $v?$ の住人である勝手な m cell v に対して、 $U?$ に対する universal な U が存在する。
 - この U について、図?? の punctured $m+1$ niche は balanced である。

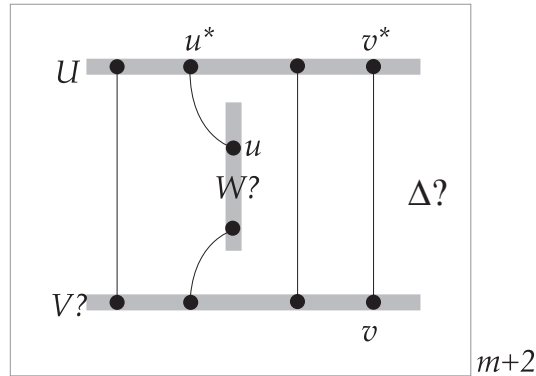


図 7: punctured niche

3.3.2 n -equivalence

ある m -frame の同居人 f, g は $m+1$ -frame を定める。この frame を持つ $m+1$ -cell α が n -equivalence であるとは、図 8 のような punctured m -niche は皆 n -balanced であることをいう。

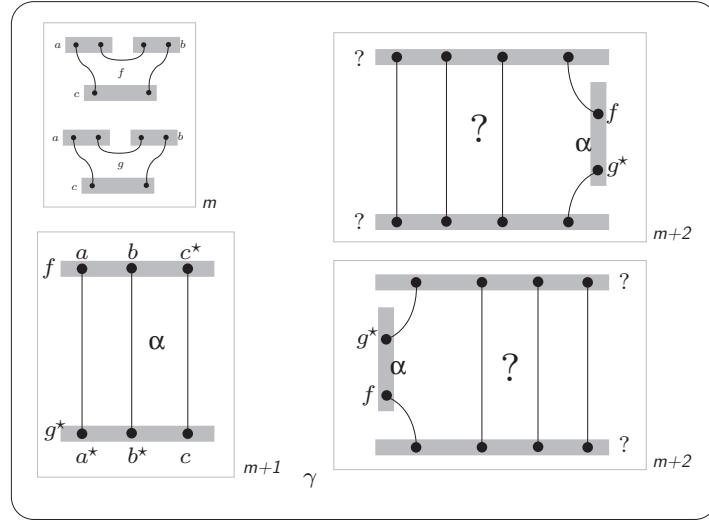
これにより、

- α の出力端子 g を $m+1$ -cell の g -入力端子 につなぐ操作
- $m+1$ -cell の f -出力端子を α の f 端子につなぐ操作

は、ともに、 $m+1$ cell の間のほぼ一対一対応を与える。「ほぼ」というのは、

- 「つなぐ」(合成) という操作が不定性を持っていること
- balanced の条件にある不定性

があるからである。

図 8: n -equivalence

3.3.3 定義

n -weak category(弱 n -圏) とは opetopic set $\mathcal{A} = \langle C_m \rangle$ で次の条件を満たすものをいう。弱 (-1) -圏を代数的圏と呼ぶ。各 $m \geq 2$ について $U_m \subseteq C_m$ を n -universal m -cell の全体とする。

1. $m \geq 3$ のとき

$$\alpha \in U_n, \partial^- \alpha \in W^\omega U_{n-1}$$

ならば

$$\partial_o \alpha \in U_{n-1}.$$

2. $n \geq 2$ について, どの n 骨格 ℓ 上の ℓ -niche

$$\ell[w^- \xrightarrow{?} ?]_n$$

にも universal な住人

$$\ell[w^- \xrightarrow{u} w_o]_n$$

が居る. このとき w_o を w^- の骨格 ℓ に基づく合成という. 合成は一つとは限らない.

3.3.4 例：1-weak 圏 ([Baez-Dolan Example 42])

1-weak 圏で

$$C_1(w) \neq \emptyset \Rightarrow w = (a; \bar{b})$$

となるようなものを考える。このとき、定義より

- $m \geq 2$ ならば、すべての m -cell は universal であり、勝手な m -niche には、唯一つの m -cell が住んでいて、それは universal である。従って、勝手な m -frame について、その in face が $m - 1$ -cell で 埋められていれば、それらは唯一つの合成を持つ。
- $m \geq 3$ ならば、すべての punctured m -niche は balanced であると呼ばれる。

1. C_0 は単に集合である。
2. 恒等射 $1_a : a \rightarrow a$ は、図 9 の 2-frame の唯一つの universal な住人 U_a の outface $\partial_o u$ として定義される。

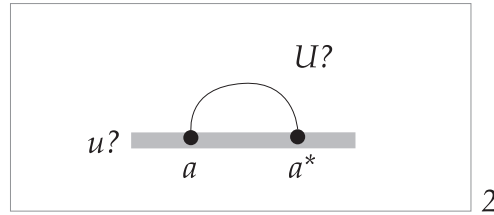


図 9: 恒等射の定義

3. 合成は図 10 の niche の唯一つの住人である universal な U により定義される。

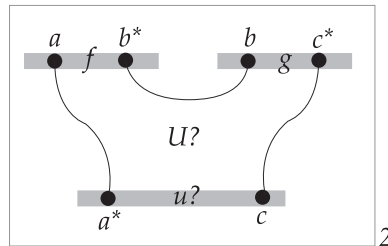


図 10: 合成の定義

4. $m \geq 2$ のとき m -cell の合成は唯一つに定義される。

用語の説明 Baez-Dolan が n -category 呼んだものを $n-1$ -weak 圏とも呼ぶことにした。そのわけは以下のとおり:

- すべての次元の cell があるから n -category というと n が最高次元を意味しているようで誤解を生じやすい。
- n 次元以上の cell の合成は strict に決まる、従って、 $n-1$ 次元までの cell については弱い意味の圏 (合成が唯一には決まらない圏) となっている、という意味で $n-1$ の方が重要な数である。
- 1-weak 圏は、ほぼ bicategory (weak 2-category) に相当する (1-cell の合成は唯一とつには決まらないが 2-cell からは合成が唯一とつ決まり、結合律が成立する)。

n -weak 圏では、 $n+1$ 次元以上では、cell の合成は唯一とつきまり、しかも合成の仕方によらない (通常の圏と同じになる) と (少しあいまいだが) 考えることができる。

n -weak であれば m -weak ($m > n$) である。

3.4 弱 n -圏 の構成

3.4.1 自由弱 n -圏

opetopic set の定義で $C_0, C_1, \dots, C_n$ まで構成できているとする。このとき、これから生成される $n-1$ -weak free quasi-category と呼ばれるもの

$$\{ C_0, C_1, \dots, \overline{C_n}, \overline{C_{n+1}}, \dots \}$$

を構成できる。これは、 n 次元以上の cell についてだけ、 n -weak の条件がなりたつものである。

1. まず、 $\overline{C_n}$ を $n+1$ -niche の全体とする。すなわち、各 $n+1$ -niche α を n -cell とみなすのだが、その際、その n -frame としては α の outface である n -frame を指定する。この $\overline{C_n}$ は operad となっている。
2. 次に、 C_{n+1} としては、 $n+1$ -frame B で次の条件を満たす場合だけ $C_{n+1}(B)$ に唯一つの元を与え、他は空とする。
 - B の各 inface には $n+1$ 次元の C_n -niche が乗っているが、それをあわせて、link を合成すると、ふたたび $n+1$ 次元の C_n -niche が得られる。それが B の outface となっている。

この決め方から、各 niche にはちょうど一つの $n + 1$ -cell があることになる。

3. 以下同様にする。つまり次は、 $C_0, \dots, \overline{C_n}, C_{n+1}$ について同様の構成を行う。

例 $I_0 = \{ * \}, I_1 = \{ f : * \rightarrow * \}$ とすると、これが生成する 0-weak category は

- $\overline{I_1} = \{ f, f^2, f^3, \dots \},$
- $I_2 \simeq \{ (n_1, n_2, \dots, n_k) \},$ ただし、 $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ は合成

$$f^{n_1} \circ f^{n_2} \circ \dots \circ f^{n_k} = f^{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

を与える 3-cell.

となる。

3.4.2 strict free n -weak category

opetopic set の定義で $C_0, C_1, \dots, C_n$ まで構成できているとする。もしも、

- 各 $n + 1$ niche は唯一つの $n + 1$ -frame に拡張される。

が満たされているとき、 $n + 1$ 次元以上の frame ごとにちょうど一つの cell を用意すると n -weak category が定まる。これを $C_0, C_1, \dots, C_n$ から生成される strict $n - 1$ -weak free category と呼ぶ。この構成が可能なのは、 $C_0, C_1, \dots, C_{n+1}$ も同じ性質を満たすからである。

例 $I_0 = \{ * \}, I_1 = \{ f : * \rightarrow * \}$ とすると、これから生成される 0-weak category は

- $I_2 = \left\{ \mu_k : f^k \rightarrow f \mid i = 0, 1, 2, \dots \right\}$

となっている。これは operad I となる。

3.4.3 弱 n -圏の自由拡大

弱 $n-1$ -圏 C があるとき、 C_n に適当な集合 X を追加して、自明な関係以外は何もない opetopic set が定義される。これを $C[X]$ と書く。

3.4.4 問題 [弱 n -圏の商]

C が弱 $n-1$ -圏であるとき、 C_n 上の同値関係 R があるとき C を拡大して、 fRg であることと、 f, g の間に equivalence があることとが同値であるようにすることができるか？

方法としては、 C_{n+1} に $\text{cell } \{ R_{fg} \mid \langle f, g \rangle \in R \}$ を添加したものを C_{n+1}^R とおき、
 $C_0, \dots, C_n, C_{n+1}^R$

から生成される自由な $n-1$ -weak category を考えるとよさそうであるが未確認。

3.4.5 Baez-Dolan の O -opetopic set

Baez-Dolan は、各 operad O ごとに、 O -opetopic set の概念を導入し、前回と同様のしかたで、 n -coherent O -algebra を定義する。

これは、以上の言葉を用いると次のように言える。0-weak opetopic set としての operad O 上の opetopic set のことを O -opetopic set という。

O -opetopic set で、 n -weak な category となっているものを $n+1$ -coherent O -algebra と Baez-Dolan は呼ぶ。ここでは n -weak O -category ということにする。これまで述べてきたものは、 n -weak I^+ -category である。

3.5 Opetopic set 上の弱 n -圏

3.5.1 O -skelton, O -niche, O -punctured niche

弱 n -圏の概念は、universal と balanced という概念に依存していたが、これらはまた、skelton, niche, punctured niche の概念に依存している。

$D \rightarrow O$ という opetopic map があるとき、 O -skelton, O -niche, O -punctured niche の概念が定義される。

D の m 次元の O -skelton とは、 O の m 次元 skelton を構成している $\text{cell}(m-2 \text{ 次元以下})$ を、その上に乗っている D の cell のいずれかに書き換えたものである。

また、 D の m 次元の O -niche とは、 D の m 次元 niche を構成している $(m-1 \text{ 次元以下})$ を、その上に乗っている D の cell のいずれかに書き換えたものである。

同様に O -punctured niche も定義される。

3.5.2 n -universality over O

上のように O 上の skelton, niche, punctured niche の概念が定義できたので、 n -universal, n -balanced, 弱 n -圏の定義にあらわれる skelton, niche, punctured niche をこれらに置き換えることにより O 上の n -universal, O 上の n -balanced, 弱 n -圏の概念が定義される。

3.5.3 O 上の代数的圏

(以下の話は最後まで確認していないので、問題としておこう。)

通常の代数理論は作用素の型を与える signature $\Sigma = \oplus_n \Sigma_n$ と等式の集合 $E \subseteq \Sigma^*[V] \times \Sigma^*[V]$ から成る。(V は変数の集合.)

まず、唯一つの変数から生成される自由代数に相当する O を次のように作る。

Σ は $O_0 = \{1\}, O_1 = \Sigma$ として、自由な弱 0 圏を生成する。ただし、 $f \in \Sigma_n$ の枠は $f: 1^n \rightarrow 1$ であるとする。このとき、 $\Sigma^*[V]$ は $\overline{C}_1$ の元と対応

する。

関係は 1-cell の対 $e = (e_1, e_2)$ 達で与えられているとしてよい。

e_1, e_2 は同じ frame を持つ。そこで、この frame に一つ 2-cell e を用意する。(このとき、その双対 e^* 2-cell も出現する)。また、各 1-cell f には恒等 2-cell 1_f を用意する。

この 2-cell 達から生成される弱 0-圏を考え、

- $e \circ e^*$ と 1
- 1_f と 1_f^*

の間に equivalence を作るようにする(この作業は前と同じことをくり返す)。

このようにして、等号を解消した代数的枠組みが構成できる。

さらに、 O -上の圏を考えることで、さまざまな構造が派生する。

3.6 virtual functor

F_k は次から生成される strict free opetopic set とする:

- $F_{k0} = \{ x_1, x_2, \dots, x_k, x_o \}.$
- $F_{k1} = \left\{ f_i : x_i \rightarrow x_i \mid i = o, 1, 2, \dots, k \right\} \cup \{ f : x_1, x_2, \dots, x_k \rightarrow x_o \}$

$n-1$ -weak F_k -category A を k -変数仮想 n -関手 (k -ary virtual n -functor) と呼ぶ。opetopic map $\kappa_i : I \rightarrow F_k$ が

$$* \mapsto x_i, f \mapsto f_i$$

により定義され、これから、 $C_i := A|_{A_i}$ が定義される。ただし、 A_i は opetopic set A の 1-cell の中で κ_i の像の上にあるものに制限したもの。

$n = 1, k = 1$ のとき

$$A : C_1 \rightarrow C_o$$

を仮想的な関手 (ana functor) とみなすことができる。

$$\tilde{A}(c, d) := \left\{ f \mid f : c \rightarrow d \text{ は } A \text{ の 1-cell} \right\}$$

とおくと、 c について反変、 d について共変な集合圏への関手となる。 c を固定すると、 $\tilde{A}(c, \bullet)$ は C_o 上の共変準層となる。しかも、 $c \xrightarrow{??}$ は universal な住人を持つので、この共変準層は representable である。従って、 c の A による像が、同型を除いて唯一と定まる。

3.7 Operad の定義

3.7.1 具体的作用素

関手 $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が与えられると

$$A_1(w) := \text{Map}\left(\prod_{i \in \text{Ind}(w)} A(\partial_i w), A(\partial_o w)\right)$$

と置くことにより関手

$$A_1 : W^{\omega, o}\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

を得る .

命題 $\varphi \in (W^{\omega, o})^2\mathcal{C}, \ell \in \mathcal{L}(\varphi)$ に対し

$$A(\ell) \in A_2(\varphi) := \text{Map}\left(\prod_{\lambda \in \text{Ind}^-(\varphi)} A_1(\partial_\lambda \varphi), A_1(\partial_o \varphi)\right)$$

が定まる . ℓ を動かせば , 写像

$$\text{Comp}_A : \mathcal{L}(\varphi) \times \prod_{\lambda \in \text{Ind}(\varphi)} A_1(\partial_\lambda \varphi) \rightarrow A_1(\partial_o \varphi).$$

を得る .

3.7.2 Preoperad の定義

$\mathcal{C}$ 上の *preoperad* とは関手

$$O : W^{\omega, o}\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

と , 各 $\varphi \in (W^{\omega, o})^2\mathcal{C}$ に対して合成作用

$$\text{Comp}_\varphi : \mathcal{L}(\varphi) \times \prod_{\lambda \in \text{Ind}^-(\varphi)} O(\partial_\lambda \varphi) \rightarrow O(\partial_o \varphi)$$

が与えられているものをいう . これは正確には φ について自然な変換

$$\Gamma(\varphi) : \mathcal{L}(\varphi) \rightarrow O_1(\varphi)$$

が与えられている , ということである .

例 1 関手 $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ から決まる

$$A_1 : W^{\omega,o}\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

は $Comp_A$ により preoperad となる .

例 2: link preoperad

$$\mathcal{L} : (W^{\omega,o})^2\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

は次の作用により preoperad となる . 各 $\Phi \in (W^{\omega,o})^3\mathcal{C}$ と $\mu \in \mathcal{L}(\Phi)$ に対して

$$Comp(\mu, -) : \prod_{\rho \in Ind^-(\Phi)} \mathcal{L}(\partial_\rho \Phi) \rightarrow \mathcal{L}(\partial_o \Phi)$$

が定義される .

3.7.3 Operad の定義

$\mathcal{C}$ 上の preoperad $\langle O, \Gamma \rangle$ が operad であるとは , 各 $\mu \in \mathcal{L}(\Phi)$ ($\Phi \in (W^{\omega,o})^3\mathcal{C}$) に対して次が可換となることをいう :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\rho \in Ind(\Phi)} \mathcal{L}(\partial_\rho \Phi) & \xrightarrow{Comp_{\mathcal{L}}(\mu, -)} & \mathcal{L}(\partial_o \Phi) \\ \downarrow \prod_{\rho} \Gamma(\partial_\rho \Phi) & & \downarrow \Gamma(\partial_o \Phi) \\ \prod_{\rho} O_1(\partial_\rho \Phi) & \xrightarrow{Comp_O(\mu, -)} & O_1(\partial_o \Phi) \end{array}$$

3.7.4 0-weak 圏としての operad

0-weak category は次のようにして operad と考えることができる。

- C_1 の元は作用素 (とその合成結果全体) を与える。
- 2-niche は作用素の合成可能な状況を与え、唯一つの universal 2-cell が棲んでいることからその合成が唯ひとつ定まる。
- 3-niche は作用素の合成を段階的に行う手順を与え、そこに棲む唯一つの 3-cell による手順の合成は、上の段階的合成を一挙に行ったものとなる。

4 まとめ

4.1 素プロセスの合成プロセス

複雑な機構の見方では、ちいさなプロセスを組み合わせ、大きなプロセスが作られる、という描像が基礎にある。しかし、プロセスが組み合わせられている場合には、「組み合わせている」何らかのプロセスが関与しているとみななければならない。しかしこのようなプロセス(2次元プロセス)はほんの少しの素プロセスしか組み合わせで維持しておくことはできないであろう。これらの2次元プロセスの現前によりある1次元プロセスの集まりは少し大きなまとまった1次元プロセスとして働く。2次元プロセス達は、いわば、1次元プロセス達を独自のまとめかたをして、少し大きな1次元プロセスの集まりに変える。2次元プロセス達自身も組み合わせられるが、そのときには3次元プロセスが関与する。一つ3次元プロセスは、さらに大きな1次元プロセスを実現する。

一つの3次元プロセスが消滅するとき、それが実現していた大きな1次元プロセスは分解して元の断片的な1次元プロセスの集合に戻ってしまう。

このように、素プロセスが協同して大域的な働きをすることは、高次元のプロセスが発生していることとして表現できる。この描像は階層的な機構のように見えるがどの2次元プロセスが働くかによって1次元プロセスの組織化は全くかわるので、固定した階層機構にはなっていない。

カオス遍歴などに見られる時空間欠性は、力学系的な枠組みでは自由度が下がる、という言い方がされるが、カオス遍歴でこういった事態が起こっているかを考える際に、非常に高い次元のプロセスが発生している、という見方は有効な働きをする可能性はありそうだ。

なお Web page “Higher dimensional group theory”⁶には次のような記事がある。

Use notions of higher order algebra in discussing the mathematics of the brain or of other organs.

1. This is a nicely wild speculation (but possibly mild in comparison with some of the speculations on the relations between mathematics and the notion of consciousness). The point is to suggest that it is very unlikely that purely “lin-

6

texttthttp://www.bangor.ac.uk/~mas010/hdaweb2.htm

ear” mathematics can describe the enormous complexities of interactions which take place in the brain. As was illustrated a long time ago in 'Abbott's fable 'Flatland', the beings who lived on a line had very limited possibilities for interactions!

2. The mathematics of the brain has surely to consider the evolution of structures, their growth and change. Methods of category theory have been applied by A. Ehresmann and her collaborators in the development of such ideas.
3. It would clearly be naive to suppose that current and recently developed ideas of higher dimensional algebra could immediately and successfully apply in this area. Nonetheless the existence of such structures does at least allow for experimental possibilities.

4.2 解消されない不定性

郡司氏による生命の理論では、「不定性」というものが重要な役割を果たす。不定性はうまくやれば解消できると考えることは、生命は機械としてとらえられる、ということの現れと考えることができる。

数学では、「同型を除いて唯一つ定まる」ということが普通におこる。しかし、同型は同値関係を生成するので、その同値関係による同値類を考えれば、ある数学的対象が唯一つ定まる、と考えることができ、「不定性」は解消できてしまう。

ところが、「同型」が同値関係を生成する、ということは、同型の「合成」が唯一つきまり、それが、また同型となっている、ということが暗黙の内に使われている。さらに、合成を続ける、ということには何の問題点はないという前提に立っている。しかし、「合成」という無名な操作にも目を向けると、その操作自身が「同型」を除いてしか決まらない、ということがあり得る。むしろ、同型の合成が確定するということは、強い条件であるとさえ見ることができる。

このように、同値関係を構成する「推移的閉包」を取るプロセス自身に目を移し、そこに隠れている「合成」の複雑な相互作用を問題にすると、もはや不定性は解消しようのないものとなる。少し乱暴ではあるが、高次元圏論は、このようなやっかいな不定性をそのままにして議論する枠組みである、と考えることも的外れではない、と思われる。

4.3 「等号」の観測

別の言い方では、高次元圏は、「異なるものが同じ」というときに、背景にある「同じ」の意味も明示的に指示する、という立場を徹底したものと考えられることもできる。

たとえば、 $f = g$ と書くときに、これの根拠となる「観測」 $U : f \rightarrow g$ に言及しなければ話は閉じない。しかし、このとき、等号の推移律

$$f = g \quad g = h \quad \Rightarrow \quad f = h$$

の背景として、2つの観測 $U : f \rightarrow g$ と $V : g \rightarrow h$ とを組み合わせる新しい観測 $W : f \rightarrow h$ が得られるという様相があらわれる。しかし、観測を組み合わせる新しい一つの観測にするという操作自身も明示的に扱わなければ話は閉じない。しかも、観測の組み合わせ方が唯一つとは限らない。こうして、 $f = g$ と $g = h$ を与える観測から $f = h$ を与える観測が唯一つ定まるというわけではないことになる。

$f = h$ の複数の観測は「同値」とであるという言い方を導入すればよさそうであるが、このとき、その同値を与える観測に目を向けなければならない。こうして、観測の観測、という様相が無限に続くのである。

Baez-Dolan では、この無限後退をある所で人工的に終わらせてしまっている。これを終わらせない場合には、universal や balanced の概念は opetopic set から決まらなくなり、opetopic set について付加的に与えなければならない。すると、この与え方には任意性が生じてしまう。

このように、高次元圏論は、内部観測の問題を考える新しい場を提供するように見える。この場は Domain 理論による場とはかなり異なるものと思われる。

高次元圏については来年度後期にふたたび取り上げる予定である。