1998年度後期 高次元圏入門　　資料 Ver. 1.11

# 1 序

## 1.1 内部観測との関係

高次元圏論の重要性は多岐に亘るが、この講義では複雑システム学の立場から高次元圏論を取り上げたい。圏論についての知識は必要に応じて説明する。一般的議論は具体的なモノの説明の補助のためにしか導入しない。

**内部観測的視座**　高次元圏論の重要性の一つは内部観測論の視座に由来する。内部観測の立場に立つと、どのような対象もその「ちょっと外側」と切り離せない[1]が、その「ちょっと外側」を確定することはできない。数学の理論でいえば、どの概念も、暗黙の了解・意図があって成立しており、その了解や意図の一部を明示化することはできるが、その明示化自身新たな暗黙の了解・意図に支えらていれる。したがって、「ちょっと外側」は完全に明示化し尽くすことはできなく、対象・概念・理論は決して「客観的に」自立しえない。完全には明示化し尽くすことはできない。

たとえば、通常の圏論のちょっと外側には「合成演算、射の同一性」がある。圏論では「合成」自身が議論の対象となることはない、合成情報は圏の構造の一部として出発点で固定され、最後まで不変である。同様に、対象の同一性は同型概念で不要となっているが、同型概念の定義にあらわれる射の同一性概念の意味は暗黙の了解となっている。これらについて、もう少し詳しく考えよう。

**合成**　一つの圏を考えるとき射の「合成」は動かせない特別な位置を占めており、合成自身について議論することはできない理論形式となっている。射を動的プロセス（計算過程、力学系、証明、変形、コヒーレンス等）の形式化として考えるとき、合成自身について明示的に語る理論形式が望まれるが、高次元圏論はまさにそういう形式を提供している。実際、射の合成自身を１次元高い射として明示的に語ることが可能となる[2]。

**同型**　集合論と異な[3]、圏論では２つの対象が同型かどうかを議論することができるだけで、同じかどうかを判定する方法はない。ところが、射については同じであるかどうかの判定条件がないにもかかわらず、$f: A \to B$ が同型であるということの定義において、$g \circ f = 1_A, g \circ f = 1_B$ のような等号があらわれる。

[1]角田秀一郎氏の私信より。
[2]ただし、高次元圏論でも globular な形式ではそのようにはなっていない。我々の意図の下では Baez-Dolan の定義は重要となる。
[3]実際には、公理論的集合論以外のところでは、「適切な」全単射のある２集合は同じものとして議論されている。

**同値関係、推移的閉包、数学的帰納法** 射の全体は、自由代数をある関係で割ったものとして、射の等式は通常の代数系と同様に「同値関係」として解釈されうる。ところが、同値関係の「ちょっと外側」には推移的閉包という操作があり、この操作のちょっと外側には「数学的帰納法」がある。

内部観測の立場では、数学的帰納法自身にもちょっと外側がある。それが、$+1$ という操作の合成可能性である。ここで、この合成自身のちょっと外側として高次元のプロセスが関与すると考えることが必要となる。

**外延的表現の排除、構成** 圏論では、ものの集まりから何らかの数学的対象を構成することは許されていない、というより、そういう構成を暗黙に行わない。集合論は、何らかの性質 $\varphi$ を持つものを集めて集合 $\left\{ x \,\middle|\, \varphi \right\}$ を作ることができるという内包性公理が基底にあるが、圏論では、そういうような対象があるとしよう、というような「宣言」によるしかない。しかし、集合論の内包性公理も、少し考えてみれば実は同種の宣言[4]でしかないことがわかる。その宣言を毎回行うことにより、話者の関与が本質的であることを明示的にすることの重要性は複雑システム学の立場では極めて重要である。

**集合概念の圏論における関与** 圏論の議論の基底となる米田の補題において集合概念が必要となるように見えるが、その使い方は限られていて（べき集合などは使われない）素朴な「ものの集まり」概念の域を脱しない。実際、豊穣圏（enriched category ）の理論により技術的な集合概念なしに圏論を構築できる。

[4]この宣言がいかに非自明なものであるかということはカントールに対する当時の一部の数学者の反応が明確に示している

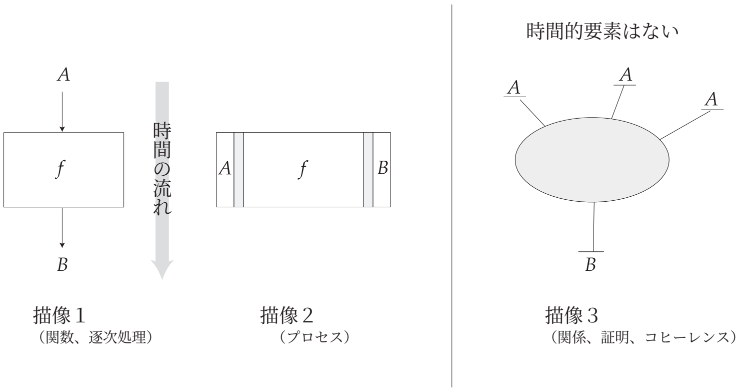
## 1.2 圏論の基盤となる視座

圏論の基礎概念である射 $f : A \rightarrow B$ は様々な描像を持つ。圏論の拡張を考える場合には、射をどの描像の下で考えるかによって方向が分岐する。

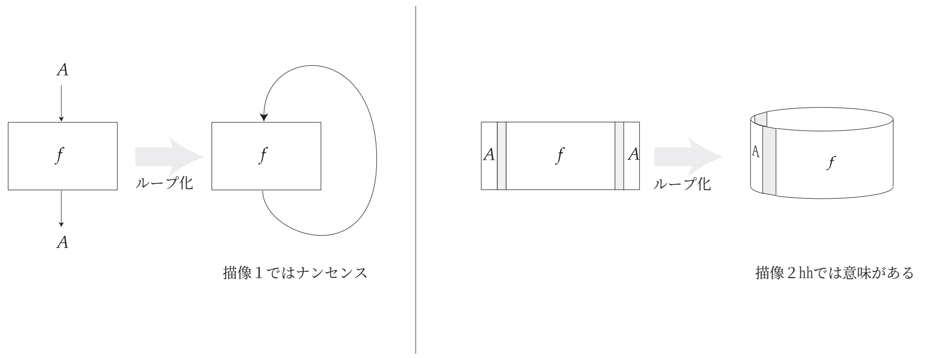
**描像１** $A$ を入力（タイプ）とし $B$ を出力（タイプ）とする過程。
この場合に $A$ が時間的に前にあり $B$ が時間的に後に来る。

**描像２** 外部と２つの作用点 $A, B$ を持つ過程。
これは、作用点 $A, B$ は継時的に存続し、役割は対称的である。圏概念の双対性を考えると、この見方が自然と思われる。$f : A \rightarrow B$ と見るか、$f : B \rightarrow A$ と見るかは、恣意的である。むしろ、$f : A, B^{*} \rightarrow$ とでも書くべきものである。

**描像３** 命題 $A$ を仮定して命題 $B$ を導く証明。
この場合には推論のプロセスは $B$ から始めて $A$ に遡ることもあり、推論の時間的流れと、論理的な順序とは直接には関係しない。




たとえば、$A = B$ の場合に、ループを作ることは描像 1,3 ではナンセンスであるのに対し、描像 2 ではそうではない。圏論の拡張では、ループの発生を排除することは技術的には簡単ではないが、ループの排除は圏論の拡張のために不可欠なわけではなく、単に描像 1,3 から生じる要請であるに過ぎない。どういう描像をとるかという点は一旦忘れて、技術的になるべく透明な枠組みを用意することが有益と思われる。



# 2 Hypercategory

上の描像に基づく一般化としてハイパー圏を導入する。ハイパー圏は対象、射、射の境界、恒等射、合成から成る。まず、対象、射、射の境界について述べる。これらはハイパーグラフの一種である。

## 2.1 ハイパーグラフ

### 2.1.1 定義

ハイパーグラフは次のものから成り立つ。

- **対象**と呼ばれるもの、$A, B, C, \cdots$ があり、各対象 $X$ に対して共役対象 $\overline{X}$ があり、$\overline{X}$ の共役対象は $X$ である。$X = \overline{X}$ ということもある。
- **射**と呼ばれるものがあり、各射 $\varphi$ は**境界**

$$\partial\varphi = (I, (\varphi_i)_{i\in I})$$

を持つ。$I = |\varphi|$ を $\varphi$ の端子集合、$i \in I$ を $\varphi$ の端子、$\varphi_i$ を $\varphi$ の端子 $i$ のタイプという。
$I = \{\ 1, 2, \cdots, n\ \}$ のとき

$$\varphi : \varphi_1, \cdots, \varphi_n$$

と書く。

対象の集まりを $\mathcal{O}$ とするとき、以上を $\mathcal{O}$ 上のハイパーグラフとも呼ぶ。

### 2.1.2 例

**通常のハイパーグラフ** $\mathcal{O}$ の有限部分集合のいくつかを射としてきめる。

$$\partial\varphi = (\varphi, 1_\varphi).$$

**ラベル付きハイパーグラフ** $\mathcal{O}$ の有限リストのいくつかを射としてきめる。
$\varphi = [A_1, \cdots, A_n]$ のとき $\partial\varphi = (\{\ 1, \cdots, n\ \}, \partial_i\varphi = A_i)$

**集合ハイパーグラフ** 対象は集合、どの集合も自己共役とする。有限集合族 $\left\{\ A_i\ \middle|\ i \in I\ \right\}$ に対し、直積集合 $X \times \prod_{i\in I} A_i$ の部分集合 $R$ を射と呼び、

$$\partial R := (I, (A_i)_{i\in I})$$

と定義する。$X$ は射 $R$ の隠れた変数と呼ぶ。

**オートマトンのハイパーグラフ** 対象は集合と $i, o$ の組。$(A,i) \leftrightarrow (A,o)$ とする。集合 $A$ に対し、$(A,i)$ を単に $A$ と書き、$(A,o)$ を $\overline{A}$ と書く。射は、入力と出力を持つ力学系

$$\varphi = (\prod_{i \in I_i} A_i \times X \to X \times \prod_{j \in I_o} B_j)$$

であり、

$$\partial\varphi = (I_i \oplus I_o, (A_i)_{i \in I_i} \oplus (\overline{B}_j)_{j \in I_o}).$$

## 2.2 monad の復習

合成を定義する前に、合成図式を定義する。そのために、link monad $\mathcal{L}$ を定義する。

monad[5]は「結合法則を満たす代数的構造」を抽象化したもので、これから定義するような場合にはたいへん便利な言語となっている。群論を例に挙げて説明しよう。個々の群を与える方法として次のようなやりかたがある。

- 群論の公理は集合 $X$ に対し、$X$ で生成される自由群 $FX$ の台集合を $TG$ を対応させる集合圏の自己函手 $F$ と自由群の積がきめる自然変換 $\mu : TT \to T$ (と生成元を埋め込む自然変換 $\eta : I \to T$) で完全にコード化される。この 3 組 $(T, \mu : T^2 \to T, \eta : 1 \to T)$ は 3 つの図式を可換にする。このような自己函手を monad という。
- monad は、その上の代数という概念がある。個々の群 $G$ は $T$-代数として表現される。$TG$ の要素は $G$ の要素達の積を取る手順（ただし公理により移りあえる手順は同一視したもの）を記述し、$\alpha_G : TG \to G$ は、その手順で積を計算した結果を与える写像である。

## 2.3 link monad

hypercategory でも、射の集まり $\mathcal{A}$ に対し、$\mathcal{LA}$ がその合成法の手順を表すものを集めたものとなる monad $\mathcal{L}$ を導入する。まず、$\mathcal{O}$ を対象の集まりとする。これは共役作用素 $A \leftrightarrow \overline{A}$ を持っている。

$$\mathcal{O}^* := \left\{ (w_i)_{i \in I} \;\middle|\; I \text{ は有限集合、} w_i \in \mathcal{O} \right\}$$

射の境界をとることにより、作用素 $\partial : \mathcal{A} \to \mathcal{O}^*$ があると考えてよい。（この作用素を持ち出す必要はないが）

次のような対 $(\varphi, \sigma)$ を $\mathcal{A}$ の一つの**結合図式**と呼ぶ。

[5]正確な定義は 1998 年度計算数学 1 講義録
http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/lectures/cs98/4-cs98.pdf
を参照。

- 有限添字付きの $\mathcal{A}$ の族 $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$. これより
$$||\varphi|| := \oplus_{i\in I}|\varphi_i| = \left\{ (ij) \;\middle|\; j \in |\varphi_i| \right\}$$
の各元 $(ij)$ には対象 $\varphi_{ij}$ が定まっている:
$$\partial\varphi_i = (\varphi_{ij})_{(ij)\in|\varphi_i|}.$$
- $||\varphi||$ の部分集合 $||\sigma||$ 上で定義された involution $\sigma$ で $\varphi_{\sigma(ij)} = \overline{\varphi_{ij}}$.

上のような組 $(\varphi, \sigma)$ の集まりを $\mathcal{LA}$ と書く。
$$\partial(\varphi, \sigma) = (||\varphi|| \setminus ||\sigma||, (\varphi_{ij}))$$
とおけば、$(\varphi, \sigma)$ 達自身が $\mathcal{O}$ 上のハイパーグラフを成す。これを $\mathcal{LA}$ と書く。

従って、$\mathcal{A} \mapsto \mathcal{LA}$ は $\mathcal{O}$ 上のハイパーグラフの圏の自己函手を定める。実はこれが自然な monad を成すことがわかる.

積
$$\mu_{\mathcal{A}} : \mathcal{LLA} \to \mathcal{LA}$$
は次のように定義する (cf 図)：$\Phi$ を $\mathcal{LLA}$ に属するものとする。このとき、定義より
$$\Phi = ((\varphi_i, \sigma_i)_{i\in|\Phi|}, \sigma_0),$$
ただし、$\sigma_0$ は $\oplus_{i\in|\Phi|}(||\varphi_i|| \setminus ||\sigma_i||)$ 上の partial involution. そこで、$\sigma = \oplus_{i\in\{\,0\,\}\cup I}\sigma_i$ を
$$||\Phi|| := \oplus_{i\in|\Phi|}||\varphi_i||$$
の上の partial involution とし、
$$\mu(\Phi, \sigma) := ((\Phi_{ij})_{(ij)\in||\Phi||}, \sigma)$$
とおく。

unit $\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{LA}$ は単に
$$\eta(\varphi) = ((\varphi), \emptyset)$$
とおけばよい。すなわち、$(\varphi)$ は端子集合が 1 点集合で、$\emptyset$ は定義域が空の involution.

次は定義より自明。

**命題 2.1** $(\mathcal{L}, \mu, \eta)$ は *monad* を成す。

#### 2.3.1 結合図式のリンク表示

射 ($\mathcal{A}$ の要素）を線分で表し、端子をその上の点で表示すると、結合図式をコンパクトに表現することができる。この表現をリンク表示という。これは、ハイパー圏を高次元化するときに便利な表示ともなっている。

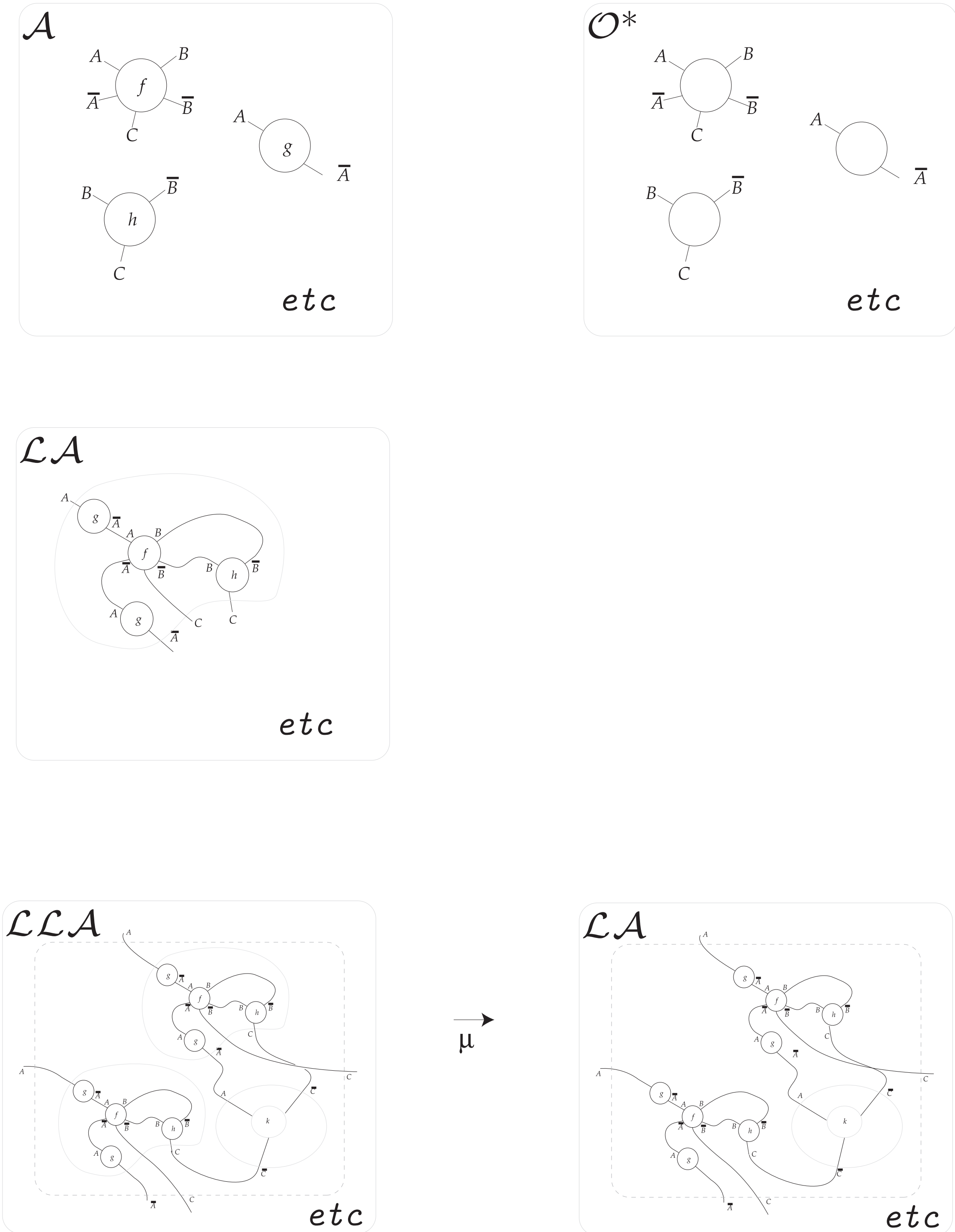



図 1: monad $\mathcal{L}$

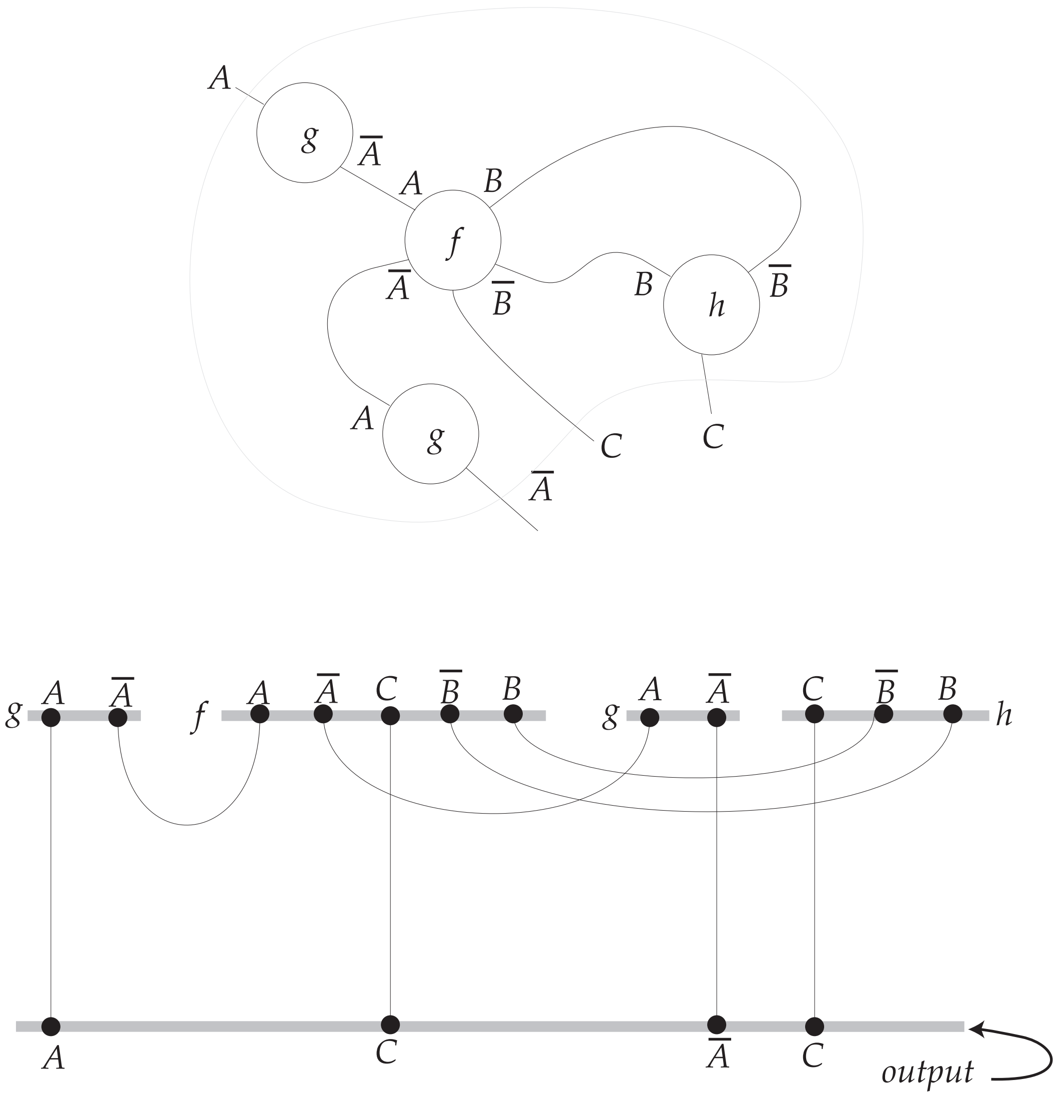


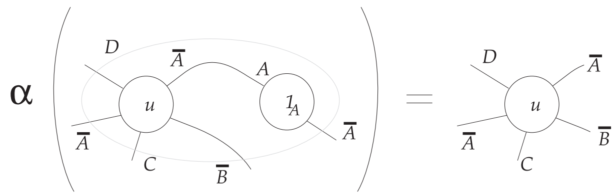

図 2: リンク図式:上の結合図式は下のように表現される．結合図式自身を射と見たものが output と書かれた線分で表現されている。

リンク表示では、結合図式自身を射と見るとき（すなわち、$\mathcal{LA}$ 自身を $\mathcal{O}$ 上のハイパー圏と考えるとき）の表示も図に書き入れ、リンクは、端子集合全体の involtion として表現される。

なお、$\mathcal{LA}$ はいくつかの重要な部分函手を持つ。とくに、サイクルのない結合図式、連結な結合図式、などが部分 monado を与える。

## 2.4 ハイパー圏

$\mathcal{O}$ 上のハイパーグラフ $\mathcal{A}$ に対し、$\mathcal{L}$-代数構造 $\alpha : \mathcal{LA} \to \mathcal{A}$ を与えたものを半ハイパー圏 (semi-hypercategory) と呼ぶ。さらに、各対象 $A$ ごとに、恒等射 $1_A : A, \overline{A}$ があり、次を満たすとき、ハイパー圏 (hypercategory) という。




有限集合を添字とする $\mathcal{O}$ の元の族 $T = (T_i)_{i \in |T|}$ を対象とし、射 $f : T \to S$ は全単射 $f : |T| \to |S|$ で $T_i = S_{fi} \quad \forall i \in |T|$ を満たすものとする。この groupoid を $\mathcal{B}ij/\mathcal{O}$ と書く。

各 $T \in \mathcal{B}ij/\mathcal{O}$ に対し、$\mathcal{A}(T)$ により、$\partial\varphi = T$ となる射 $\varphi$ の集まりを表すとき、これが函手 $\mathcal{A} : (\mathcal{B}ij/\mathcal{O})^{op} \to \mathcal{S}\mathbf{et}$ に拡張されているとする。具体的に言えば、$\mathcal{B}ij/\mathcal{O}$ の射 $\kappa : T \to \partial\varphi$ に対して、

$$\partial(\varphi^\kappa) = T$$

なる射 $\varphi^\kappa$ が対応し、合成について準同型となっている：

$$\varphi^{\kappa\circ\lambda} = (\varphi^\kappa)^\lambda.$$

（これは、単に、図で書いたときの形で射が決まることを言っている。ただし、2 つの図が同じ射を表すというときに、端子がどのように対応するかも指定しないといけない。）

ハイパー圏が**対称**であるとは、$\kappa \in \mathcal{B}ij/\mathcal{O}(\partial\varphi, \partial\varphi)$ ならば、$\varphi^\kappa = \varphi$ となることをいう。

## 2.5 自由ハイパー圏

$\mathcal{LA}$ は $\mu$ によりハイパー圏となる。これを $\mathcal{A}$ で生成される自由ハイパー圏という。

### 2.5.1 例：グラフの対称ハイパー圏

$\mathcal{O} = \{\bullet\}$ $(\bar{\bullet} = \bullet)$ とし、各 $n \geq 0$ に対し、$a_n : \overbrace{\bullet, \cdots, \bullet}^{n}$ なるハイパー辺を用意する。これらが生成する自由ハイパー圏 $\mathcal{LA}$（正確に言うと、それを「対称化」したもの）は対称グラフにより表現される。合成は単にグラフの結合で表される。

## 2.6 関係で割った自由ハイパー圏

通常の代数の表示と同様に、自由ハイパー圏を合同関係で「割って」種々のハイパー圏を構成することができる。一つの関係は、（同一視したい）結合図式の対で、それぞれを射と見たときの端子集合の間に型を保つ全単射があるもので与えられる (cf. 図 3)。

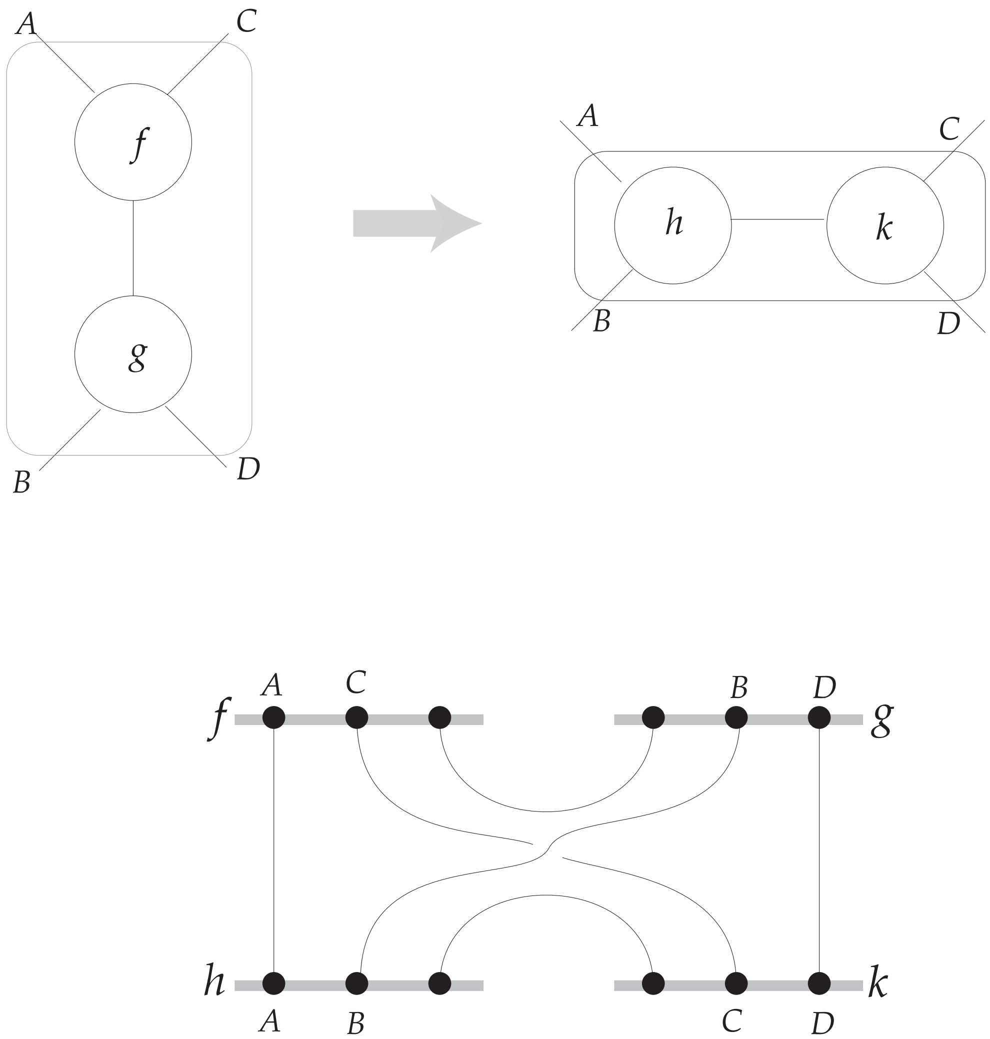
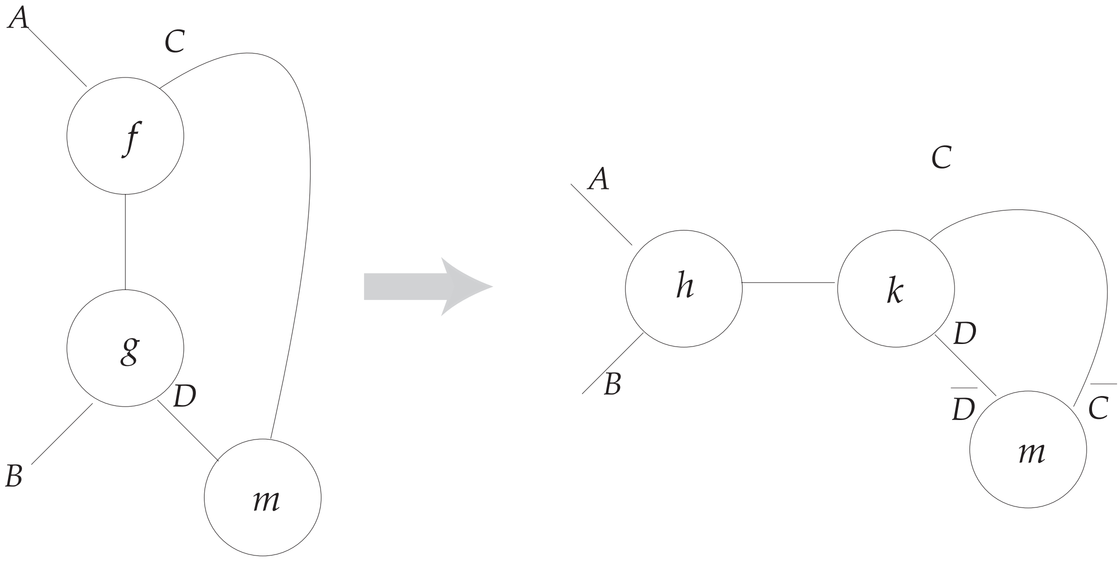



図 3: 関係の例:下はリンク図式で上を表現したもの

いくつかの関係が与えられると、その関係を合成によって拡大する。たとえば、上の関係から、図 4 のような（等式となるべき）関係が導かれる。



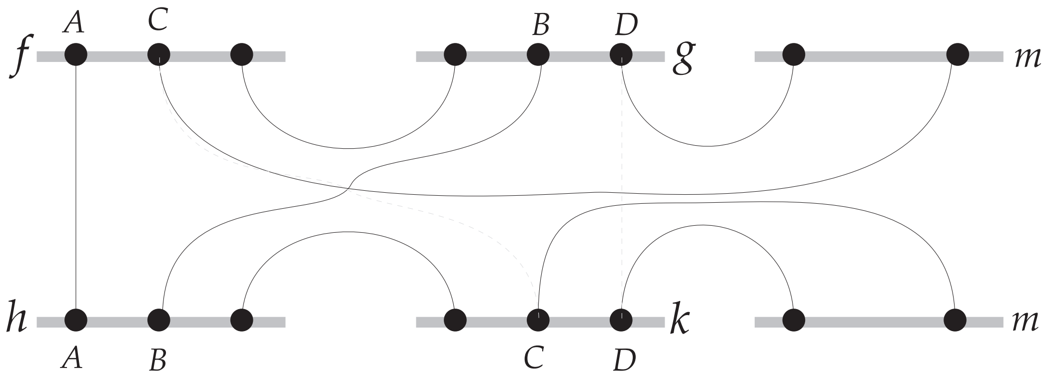




図 4: 図 3 の関係から導かれる関係の例

そのあと同値関係に拡大し、その同値類を射とする。

以下、Hypercategory を、普遍代数の場合と同様に、$\langle \mathcal{O}, \mathcal{A}_0, \mathcal{R} \rangle$ によりあたえる、ただし

- 生成元となる、射の集合 $\mathcal{A}_0$,
- 関係を与える、結合図式の対の集合 $\mathcal{R}$.