3 Hypercategory の例

3.1 $\mathcal{S}$et

このハイパー圏では、すべての対象は自己共役である。

結合図式 $R = ((R_i)_{i\in I}, \sigma)$ があるとする。すなわち、$\partial R_i = (I_i, (R_{ij})_{j\in I_i})$ $(i \in I)$ であり

$$R_i \subseteq X_i \times \prod_{j\in I_i} R_{ij}.$$

しかも σ は

$$J := \oplus_{i\in I} I_i$$

の部分 involution. このとき

$$\alpha(R) = \varpi(\prod_{i\in I} R_i \bigcap Z(\sigma)),$$

ただし、

$$Z(\sigma) \subseteq \prod_{i\in I}(X_i \times \prod_{j\in I_i} R_{ij})$$

は方程式 $r_{ij} = r_{\sigma(ij)}((ij) \in J)$ で定義される部分集合 (r_{ij} は R_{ij} の要素を表す。) 。

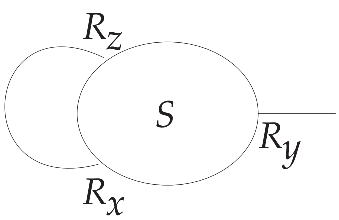
$$\varpi : \prod_{i\in I}(X_i \times \prod_{j\in I_i} R_{ij}) \rightarrow X \times \prod_{(ij)\in J\setminus||\sigma||} R_{ij}$$

は射影。ただし、

$$X = \prod_{i\in I} X_i \times \prod_{(ij)\in||\sigma||_{1/2}} R_{ij}$$

ここで $||\sigma||_{1/2}$ は $||\sigma||$ の σ 作用についての完全代表系.

例えば、$S = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} : \mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$ を、結合図式



によって自己合成すると、

$$\alpha(S) = T := \left\{ (x, y) \;\middle|\; 2x^2 + y^2 = 1 \right\} : \mathbf{R}_y$$

となる (x は隠れた変数となる。)。

3.2 Dyn

オートマトン (**??**) のハイパーグラフは自然にハイパー圏の構造を持つ。ただし、オートマトンの数学的データ

$$\tau : I_1 \times \cdots \times I_n \times X \to X \times O_1 \times \cdots O_m$$

を、どのような作動の記述に使うかで、合成の意味は異なってくる。

ここでは、離散的なデータフロー型の処理系としてオートマトンを解釈し、各入力端子はデータの待行列を持ち、すべての入力端子の待行列が空でなくなったとき、処理が始まる。入力端子の待行列のトップデータはなくなり、内部状態 $\in X$ が更新され、各出力端子から $b_j \in O_j$ が送りだされる。出力端子 O_j が他のオートマトンの入力端子に接続されているときには、b_j はその入力端子の待行列に加えられる。

この意味では、有限個のオートマトンの結合図式は、一つのオートマトンとして見ることは容易にできる。ただし、結合にサイクルがある場合には、入力端子の初期データを与える、という恣意的な面を取り入れておかなければならない。最も簡単なものは、入力端子 i が他のオートマトン M の出力端子 o に繋がっているときは、M の状態 q から出される出力データ x_o を即時に入力端子 i の入力データとするものである。しかしここには、様々な選択肢がある。

3.3 deductive system

単純古典論理を考える。すなわち、論理演算は否定だけで、$A_1, \cdots, A_n$ のいずれかが成り立つことを

$$\vdash A_1, \cdots, A_n$$

と書く。このような命題の有限列ごとに一つだけ射を用意する。これにより hypercategory を得る。これは排中律と、次の cut rule からわかる。

命題 1 $\vdash A, A_1, \cdots, A_n, \vdash A^c, B_1, \cdots, B_m$ ならば

$$\vdash A_1, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_m.$$

これは、結合図式としてはサイクルのないものに限らなければならない。

3.4 Lafont の interaction net

- $\mathcal{O} = \{ \bullet \}$,
- $\mathcal{A}_o = \{ \alpha_1, \cdots, \alpha_m \}$, $\partial\alpha_i = \{ 0, 1, \cdots, n_i \}$, ($n_i$ を α_i の arity と呼ぶ。
- 各 i, j について、$\alpha_i \circ_0 \alpha_j$ を左辺にする等式が高々ひとつある。

自然数の実現　$\mathcal{A}_o = \{\ s, \times, +, \epsilon, \delta\ \}$ 関係：図 A

interaction combinator　$\mathcal{A}_o = \{\ \epsilon, \delta, \gamma\ \}$ 関係：図 B

3.5 Milnor の action calculus

これは並列系の記述するための方法として R. Milnor が試みたものである。

- $\mathcal{O} = \{\ \bullet, \bar{\bullet}\ \}$,
- $\mathcal{A}_o = \{\ \alpha_1, \cdots, \alpha_m\ \}$,

$$\partial\alpha_k = (\{\ 1, \cdots, m+n\ \}, \overbrace{\bullet\cdots\bullet}^{m}, \overbrace{\bar{\bullet}\cdots\bar{\bullet}}^{n})$$

  このとき、$\alpha_k : m \to n$ と書く。

- 結合図式はサイクルのないものだけを考える。(このとき polycategory という。)
- いくつかの relation.

3.5.1 例：π 算法

- $\mathcal{A}_o$:

$$\begin{cases} \omega : 1 \to 0 \\ \nu : 0 \to 1 \\ out_m : m \to 1 \\ box_m : 1 \to m \end{cases}$$

- 関係は図 1.