4 2-Hypercategory

4.1 2圏の復習

詳しくは昨年度の資料を参照（２つのファイルの内容は同じ）:
`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/lectures/am98/s2-am97-14.pdf`(554KB,ACROBAT 形式)
`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/lectures/am98/s2-am97-14.ps.gz`(656KB,POSTRSCRIPT 形式)
(id:fcs, password:hokumathfcs).

4.2 定義

2圏（狭義2次元圏）は、2グラフと合成からなる：

- 2グラフは
  - 0セル（頂点）
  - 1セル（辺）: $\boxed{f : A \to B}$, 特別なものとして恒等1セル $1_A : A \to A$.
  - 2セル（面）: $\boxed{\alpha : f \to g : A \to B}$(この記号は、$f, g$ が A から B への1セルで、α が f から g への2セルであることを表す). 特別なものとして恒等2セル $1_f : f \to f : A \to B$. f, g に言及しなくてよいときは $\alpha :: A \to B$ または $A \overset{\alpha}{\Longrightarrow} B$ と書く。
- 1セルの垂直合成：$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ のとき $A \xrightarrow{g \circ f} C$. これにより、0セルを対象、1セルを射とする圏が定まる.
- 2セルの垂直合成：$f \xrightarrow{\alpha} g \xrightarrow{\beta} h : A \to B$ のとき

$$f \xrightarrow{\beta \circ \alpha} h : A \to B$$

  が定義され、各 A, B について $A \xrightarrow{f} B$ なる f を対象とし、$f \to g$ なる2セルを射とする圏が定まる。
- 2セルの水平合成：$A \overset{\alpha}{\Longrightarrow} B \overset{\beta}{\Longrightarrow} C$ にたいし

$$A \overset{\beta \star \alpha}{\Longrightarrow} C$$

  が定義され、これにより、0セルを対象とし、2セルを射とする圏が定まる。さらに

$$d_i(\beta \star \alpha) = d_i\beta \circ d_i\alpha \quad \text{for } i = 0, 1.$$

  ただし、$\alpha : f \to g$ のとき $d_0\alpha = f, d_1\alpha = g$.
- 交換法則 (Interchange law)：$\alpha_1, \alpha_2 :: A \to B$,$\beta_1, \beta_2 :: B \to C$ のとき

$$(\beta_2 \circ \beta_1) \star (\alpha_2 \circ \alpha_1) = (\beta_2 \star \alpha_2) \circ (\beta_1 \star \alpha_1),$$

  ただし、垂直合成ができる状況とする。

- 1 セルの合成と 2 セルの水平合成は整合的である、すなわち $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ のとき

$$1_{f \circ g} = 1_f \star 1_g.$$

以上は、$\mathcal{C}(A, B)$ が圏の構造を持ち、函手 $1_A : \mathbf{1} \to \mathcal{C}(A, A)$ ($\mathbf{1}$ は集合圏の terminal object) と合成を与える函手

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$$

があり、函手として結合法則と恒等律がなり立つ、というように表現することができる。

なお、結合法則が upto iso でしか成り立たないときは、双圏（bicategory) と呼ばれる。具体例の多くは双圏である。

4.3 strict 2-hypercategory

strict 2-hypercategory は hypergraph のかわりに 2-hypergraph, すなわち函手

$$\mathcal{A} : (\mathcal{B}ij/\mathcal{O})^{op} \to \mathcal{CAT}$$

をとる[1]。

2-hypergraph の圏の自己函手 $\mathcal{L}$ が前と同様に定義される。T を $\mathcal{B}ij/\mathcal{O}$ 対象とするとき、terminal 2-hypergraph を $\mathbf{1}$ (すなわち $T \mapsto \{*\}$) とし、

$$\mathcal{L}_T := (\mathcal{L}\mathbf{1})(T)$$

とおくと、この元は $B = (|B|, (T_i)_{i \in |B|}, \oplus_i |T_i| \setminus T)$、というもの（ただし $T \subseteq \oplus_i |T_i|$ という制約がある）となっている。これは結合図式の「骨組み」である。この骨組みに対し、圏の直積

$$\prod_{i \in |B|} \mathcal{A}(T_i)$$

が定義される。これらの圏を $B \in \mathcal{L}_T$ について直和して得られる圏を $\mathcal{L}\mathcal{A}(T)$ と定義する、すなわち

$$\mathcal{L}\mathcal{A}(T) := \bigoplus_{B \in \mathcal{L}_T} \prod_{i \in |B|} \mathcal{A}(T_i)$$

とおくと、$\mathcal{L}\mathcal{A}$ が再び $\mathcal{O}$ 上の 2-hypergraph となる。

前節の monad μ は自然に $\mu : \mathcal{L}\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ に拡張される。これの成分 μ_T は自然変換となるので、垂直合成（各成分圏内の合成）と水平合成（μ による合成）とは可換である。

μ-algebra を 2-hypercategory と呼ぶ。各圏 $\mathcal{A}(T)$ が thin な 2-hypercategory を 2-thin という。

[1]第 1 節の Ver 1.2 で groupoid $\mathcal{B}ij/\mathcal{O}$ を導入した：有限集合を添字とする $\mathcal{O}$ の元の族 $T = (T_i)_{i \in |T|}$ を対象とし、射 $f : T \to S$ は全単射 $f : |T| \to |S|$ で $T_i = S_{fi} \quad \forall i \in |T|$ を満たすものとする。この groupoid を $\mathcal{B}ij/\mathcal{O}$ と書く。

注意 [2] strict 2-hypercategory では、許される 2-cell の形は限られている。たとえば、1-cell が $A{\to}B$ という形だけの場合には、通常の場合と同様に、$\alpha : f{\to}g : A{\to}B$ という形の 2-cell しか考えることができない。

4.4 2-cell より生成される 2-free 2-hypercategory

hypercategory $\mathcal{A}$ があるとき、同じ境界を持つ結合図式の対 Φ, Ψ をいくつか与えると、

$$\alpha : \Phi{\to}\Psi$$

を生成元とする 2-hypercategory が定義される。生成元を R とするとき、これを $\mathcal{A}[R]$ 書く。

4.5 2-hypercategory

図 1 のよな形の 2-cell (computad) を直接表現できる形式を考えよう。

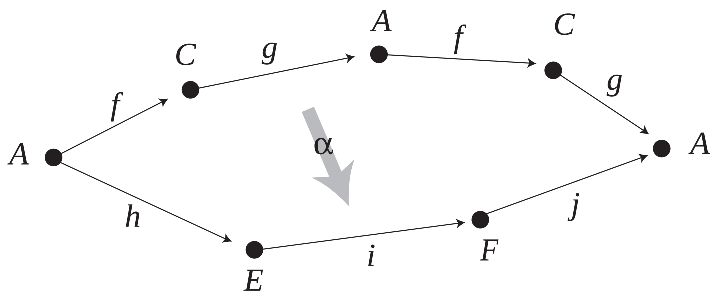


図 1: Computad

方針

- $\mathcal{O}$ 上の 1-hypersignature[3] $\mathcal{A}$ を与える。
- 1-cell にも conjugation を導入し、$\partial\varphi^* = (\partial\varphi)^*$ となるようにする、ただし、$(\varphi_i)^* = (\varphi_i^*)$.
- 1-cell で作られる枠（2-骨格）を定義する。
- 各 2-骨格に 2-cell を割り当てる。(2- hypersignature)
- 2-hypersignature の圏に monad μ を定義する。
- μ-代数として 2-hypercategory を定義する。

[2] 98.11.12
[3] 前回まで hypergraph と呼んでいたもの

4.5.1 2-骨格の定義

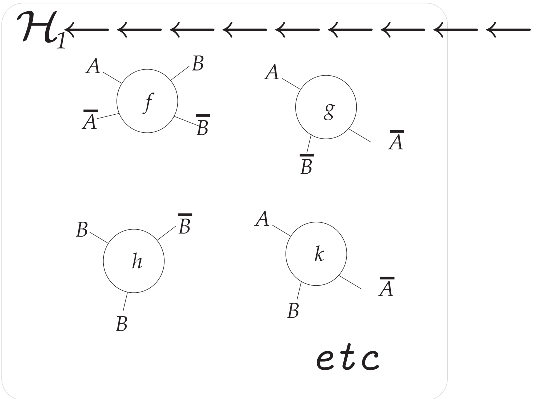
$\mathcal{H}_1$ を $\mathcal{H}_0$ 上の 1-hypersignature とする。結合図式で境界のないもの、すなわち、involution が全体で定義されているもの全体 $\mathcal{LH}_1(\emptyset)$ を考える。この要素を 2-骨格と呼ぶ。2-骨格は、

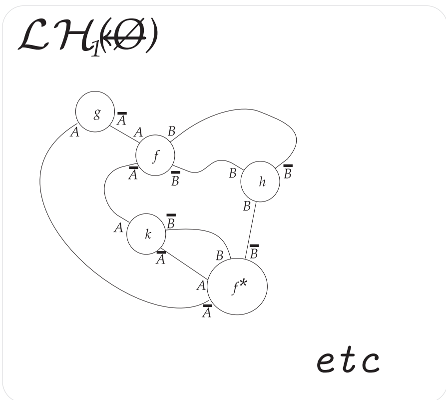
$$\alpha = ((\alpha_i)_{i\in|\alpha|}, \tau)$$

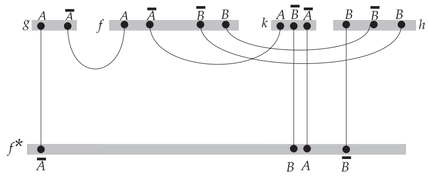
と表現される、ただし、$\alpha_i \in \mathrm{elt}(\mathcal{H}_1)$,$\tau$ は

$$||\alpha|| := \oplus_{i\in|\alpha|}|\partial\alpha_i|$$

上の involution. これは自然に圏の構造を持つ.







4.5.2 2-hypersignature

2-hypersignature $\mathcal{H}_2$ は、各 2-骨格にいくつかの 2-cell を指定する：

- 函手 $\mathcal{H}_2 : \mathcal{LH}_1(\emptyset)^{op} \to \mathcal{S}\mathbf{et}$.

4.5.3 Pasting diagrams of 2-cells

$\mathcal{H}_2$ は $\mathcal{H}_1$ 上の hypersignature とみれるので、$\mathcal{L}\mathcal{H}_2$ が定義される。2-cell の Pasting diagram $\Phi = ((\Phi_i)_{i\in|\Phi|}, \tau)$ に対して、2-骨格 $\partial\Phi$ が定義される。従って、

$$\mathcal{L}\mathcal{H}_2(\alpha) = \left\{ \Phi \;\middle|\; \partial\Phi = \alpha \right\}$$

と置くことにより、$\mathcal{L}\mathcal{H}_2$ も 2-hypersignature となる。これより、2-hypersignatures の圏の上の endofunctor $\mathcal{L}$ が得られた。

以前と同様に 自然変換 $\mu : \mathcal{L}\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ が定義され、これは monad となる。この monad 上の代数を *2-hypercategory* と呼ぶ。各 2-骨格 α に対し、$\mathcal{H}_2(\alpha)$ が高々 1 個の元からなる 2-hypercategory は *thin* であるという。

2-hypercategory $\mathcal{H}$ から thin 2-hypercategory $|\mathcal{H}|$ を

$$|\mathcal{H}|(\alpha) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{H}(\alpha) \neq \emptyset$$

で定義する。これを $\mathcal{H}$ を簡約した thin 2-hypercategory と呼ぶ。

$\mathcal{L}\mathcal{H}_1$ は μ により 2-hypercategory となるが、これを $\mathcal{H}_1$ **の生成する自由** *2-hypercategory* と呼ぶ。これを簡約した thing 2-hypercategory を $\mathcal{H}_1$ の生成する thin 2-hypercategory と呼ぶ。

4.5.4 通常の圏が定める 2-hypercategory

$\mathcal{C}$ を普通の圏とする。これは次のような thin 2-hypercategory を定める：

- $\mathcal{H}_0 = \mathcal{C}_0 \coprod \overline{\mathcal{C}_0}$, $A^* = \overline{A}$
- $\mathcal{H}_1 = \mathcal{C}_1 \coprod \overline{\mathcal{C}_1}$, ただし、$f : A\to B$ のとき

  $$\partial f = (A, \overline{B}), \partial\overline{f} := (\overline{A}, B)$$

  かつ $f^* := \overline{f}$ とする。
- $f_1, \cdots, f_n(n > 1$ の合成が g となるとき、図 2 のような 2-cell $\mu, \mu^{\#}$ を用意する.

これにより生成される、thin 2-hypercategory を、圏 $\mathcal{C}$ に附随する 2-hypercategory と呼び $\mathcal{H}_2\langle\mathcal{C}\rangle$ と書く。これは次のような性質を持つ：

命題 4.1 $g = f_n \circ \cdots \circ f_1$ *であることと、図 3 のような 2-cell があることとは同値である。*

これにより、圏 $\mathcal{C}$ の構造は、2-hypercategory $\mathcal{H}_2\langle\mathcal{C}\rangle$ の構造から回復できる。

逆に、thin な 2-hypercategory $\mathcal{H}_2$ があって、次の条件を満たしているとする：

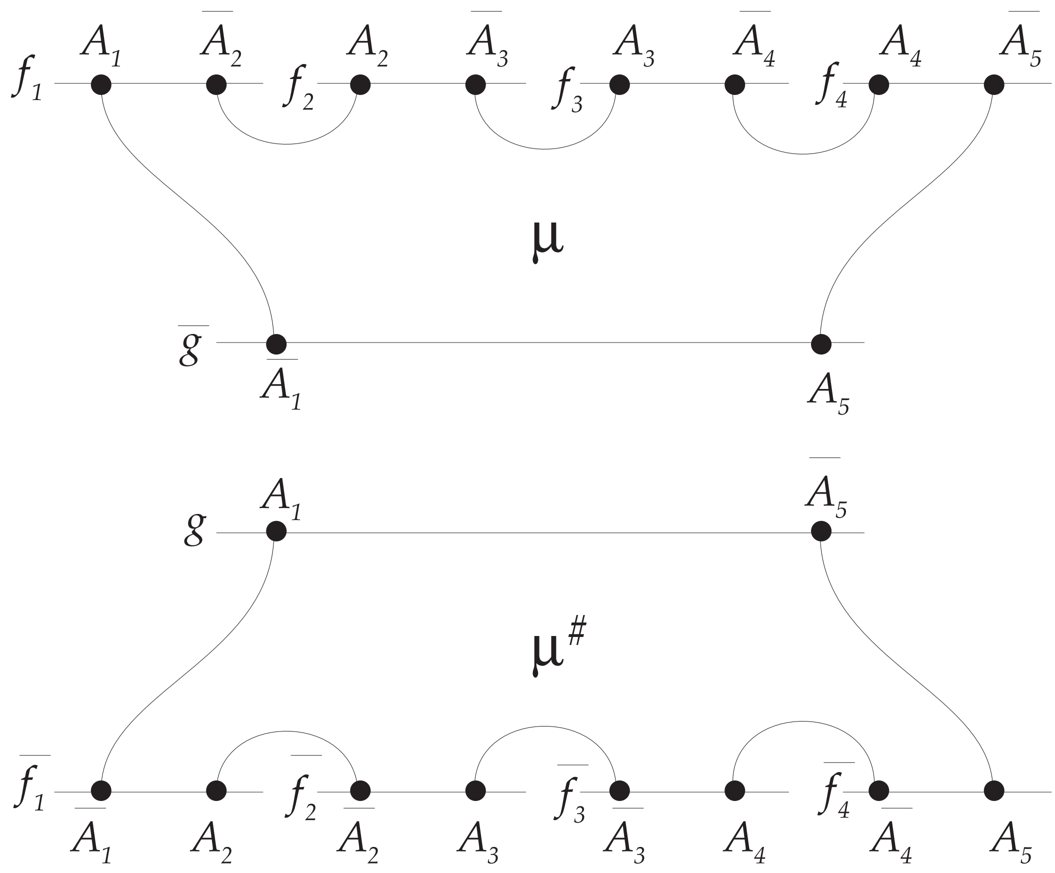


図 2: 合成にたいして用意する 2-cell

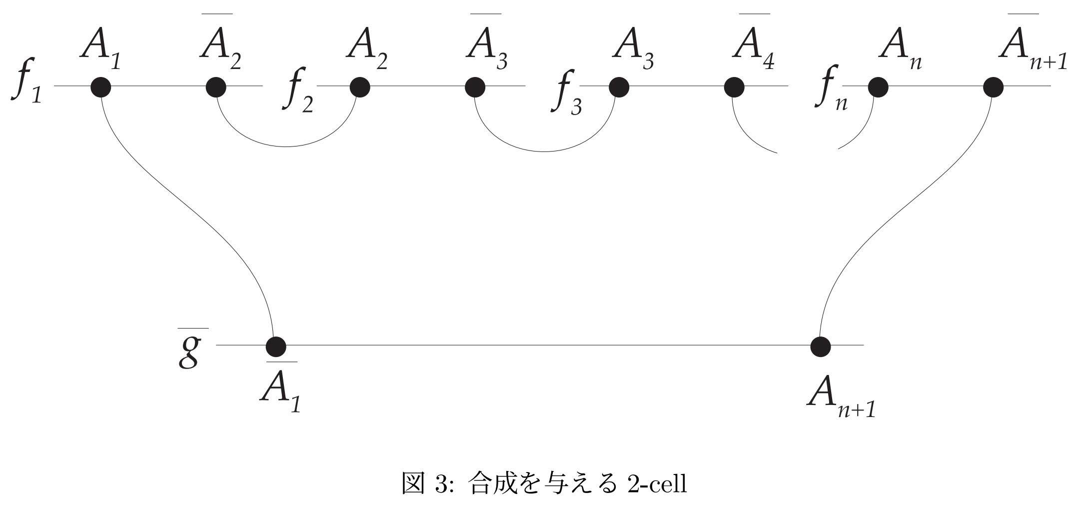


図 3: 合成を与える 2-cell

1. 0-cell は $C_0 \coprod \overline{C_0}$ とタイプが 2 分されていて、共役で移りあう。
2. 1-cell の境界は $(A, \overline{B})$ または $(\overline{A}, B)$ という型を持ち、$\partial f = (A, \overline{B})$ のとき $\partial f^* = (\overline{A}, B)$.
3. 0-cell A には $\partial 1_A = (A, \overline{A})$ という 1-cell1_A がある。
4. 「合成可能」な f_1, f_2 に対し、$3(n=2)$ のような g と 2-cell が唯ひとつ存在する。
5. 各 1-cell f に対し図**??**のような 2-cell がある。

このとき、図 3 のような 2-cell があるときに、

$$g = f_n \circ \cdots \circ f_1$$

となるような圏の構造が入る。

4.6 グラフ書き換え規則の定める 2-hypercategory

hypercategory を生成元と関係で記述する方法を前節で述べたが、これは前節で述べた 2-cell の生成元によって定義される thin 2-hypercategory によって簡単に表現できる。

$\mathcal{A} : (\mathcal{B}ij/\mathcal{O})^{op} \to \mathcal{S}\mathbf{et}$ を 1-hypersignature とし、$\mathcal{R}$ を自由 hypercategory $\mathcal{LA}$ の関係とする。

ここで、次のような thin 2-hypercategory を考える。

- $\mathcal{H}_1 = \mathcal{LA}$ を 1-hypersignature とし、
- (Φ, Ψ) が関係 $\mathcal{R}$ に属しているとする。このとき、それぞれは $\mathcal{LLA}$ の要素で、同じ境界 $\in \mathcal{LA}$ をもつ。従って、$(\Phi, \Psi), (\Psi, \Phi)$ はともに 2-骨格を定める。そこで、各 2-骨格に一つずつ 2-cell $\rho_{\Phi\Psi}, \rho_{\Psi\Phi}$ を用意する。

これが定める thin 2-hypercategory を考えるとき、2-骨格 (α, β) を境界とする 2-cell があることと、自由 hypercategory $\mathcal{LA}$ の 2 つの 1-cell α, β とが $\mathcal{R}$ についえ同等であることが同値である。

4.7 生成元と関係式による 2-hypercategory の定義

$\mathcal{H}_2$ で生成される自由な 2-hypercategory $\mathcal{LH}_2$ に同値関係を入れて商をとることにより多様な 2-hypercategory を定義することができる。方法は、hypercategory の場合とほぼ同様である。

1. 同じ 2-骨格を持つ 2-cell の対 (α, β) の集まりを与える。
2. α を含む 2-cell$\Phi[\alpha]$ があるとき、その α を β に置き換えた 2-cell$\Phi[\beta]$ もあるので、この対 $(\Phi[\alpha], \Phi[\beta])$ を付け加える。

こうして得られる 2 項関係を含む最小の同値関係により 2-cell の集合を割ると、2-hypercategory を得る。

4.8 通常の 2-圏に附随する 2-hypercategory

$\mathcal{C}$ が 2-圏であるとき、次のような 2-hypercategory を考えることにより、図 1 のような computad も「正式に」2-cell と見なすことができる。

1. $\mathcal{C}$ の圏の部分の構造から前節のように $\mu, \mu^\sharp$ を導入する。
2. 既にある 2-cell $\alpha : f \to g : A \to B$ は、図 4 右のような 2-骨格に対応する 2-cell として加えておく。

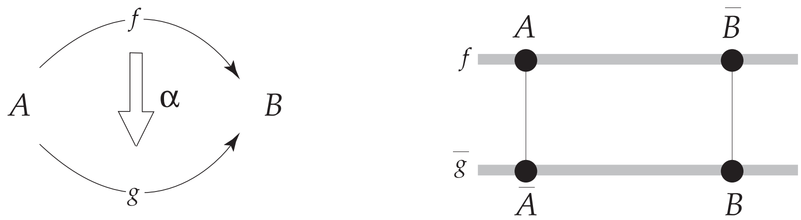


図 4: 2-cell の骨格

関係としては

1. 既に成り立っている関係式は付け加えておく。たとえば、垂直合成については、図 5 のような等式を加える。
2. また、$\mu, \mu\#$ に対しては、前節の thin 2-hypercategory で成り立つ関係をすべて加えておく。たとえば図 6 など。

このとき、図 1 は、図 7 のような合成として表現できる。

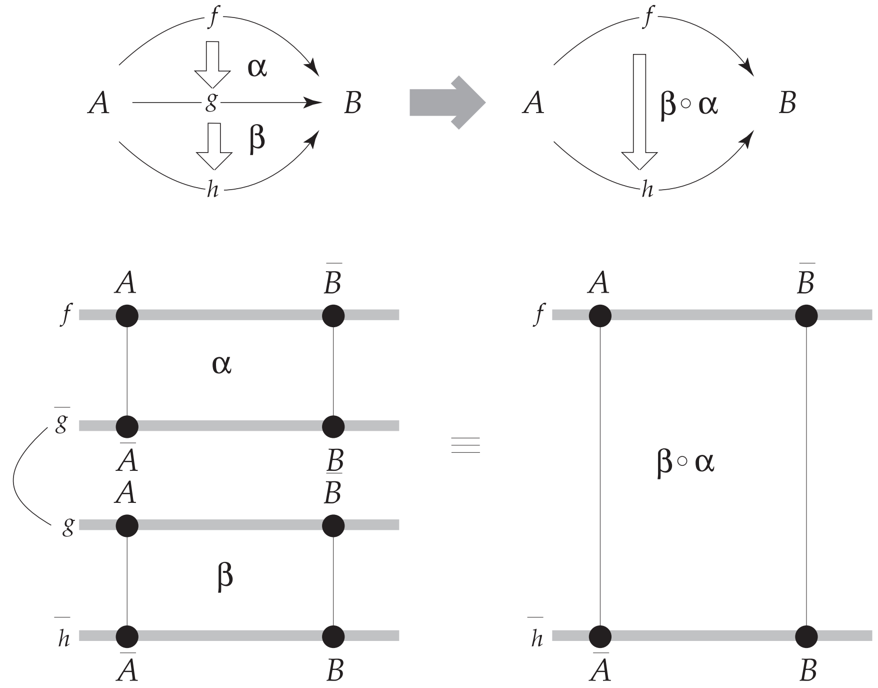


図 5: 垂直合成に対応する関係

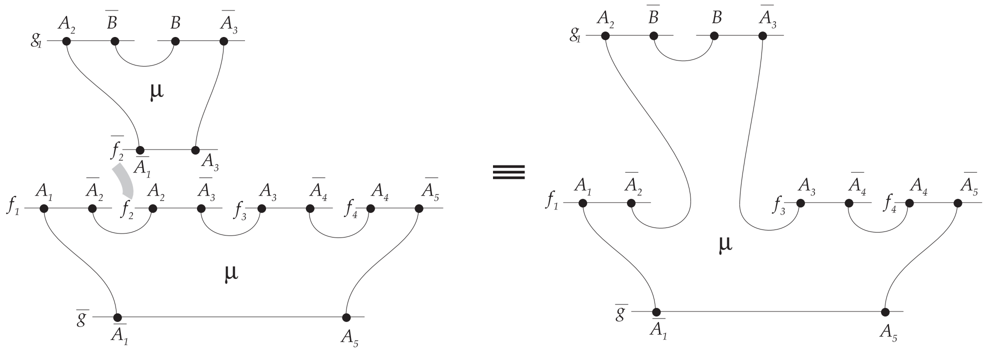


図 6: μ の関係

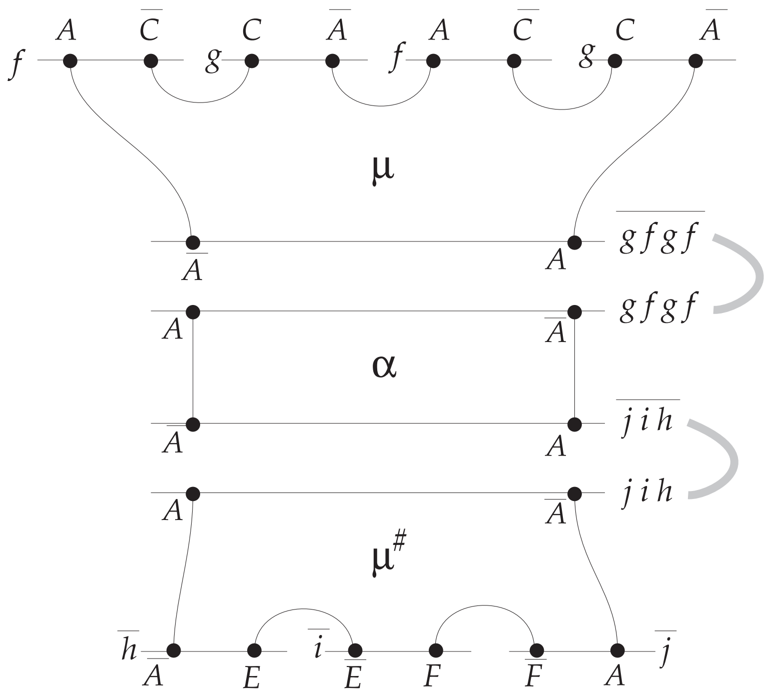


図 7: computad の実現