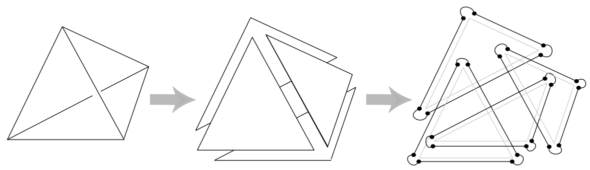
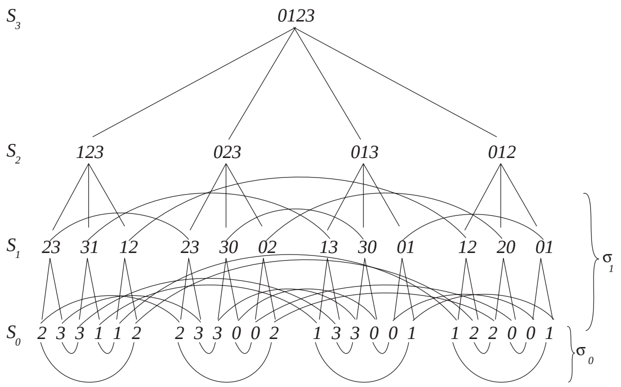
5 高次元 hypergraph

5.1 殻の定義

背景 多面体を次のように完全に blow-up すると、低次元の辺は何重にもあらわれる。i 次元の辺は、どの $i+1$ 次元の面に乗っているかによって分かれ、それぞれの分身は $i+2$ 次元の面がどの $i+2$ 次元の面に属しているかによって、さらに分かれる。



これは次のように表示できる：



この構造を組み合わせ論的に表現したものが殻 (shell) である。

定義 n **次元の殻**(n-shell) S は次のようなデータ $\langle S_i, \pi_i, \sigma_i \rangle$ からなる。

- 有限集合の組 $\langle S_0, \cdots, S_n = \{\ r_S\ \} \rangle$。 S_i の元を i **次元成分**という。
- 写像 $\pi_i : S_i \to S_{i+1} (i < n)$. k この π_i の合成を π^k と略記する、ただし π^0 は恒等写像をあらわす。$\pi^i y = x$ となる $i \geq 0$ があるとき y **は** x **に含まれる**という。
- $i \leq n-2$ について、S の i **次元骨格**$S_{[i]} := \oplus_{j \leq i} S_i$ 上の次元を保つ involution σ_i.

これらは次の条件をみたす。

- $i < n-2$ については固定点を持たない。
- $|i-j| \geq 2$ ならば σ_i と σ_j は意味のある所で可換。
- $i < n-2$ のとき、各 $x \in S_{i+2}$ について σ_i は S^x を不変にする。ここで S^x は x に含まれる成分の全体をあらわす。

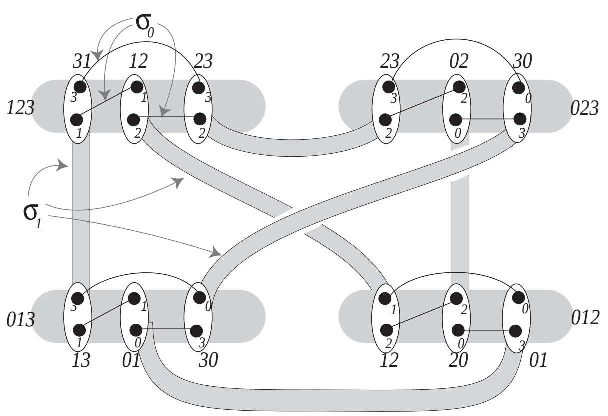
i について $\sigma_i x = y$ という関係を持つ異なる x, y は S **でリンクされている**という。$n \geq 2$ のとき σ_{n-2} が固定点を持つ時、殻 S は**開いている**という。そうでないときは**閉じている**という。1 次元の殻についてはinvolution がないので開閉の概念は定義しない。

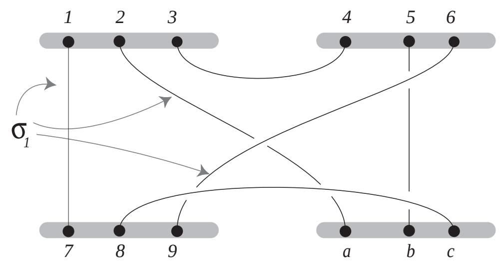
i 次元成分 x について S^x は i-殻 となる。これを x **に従属する殻**と呼ぶ。

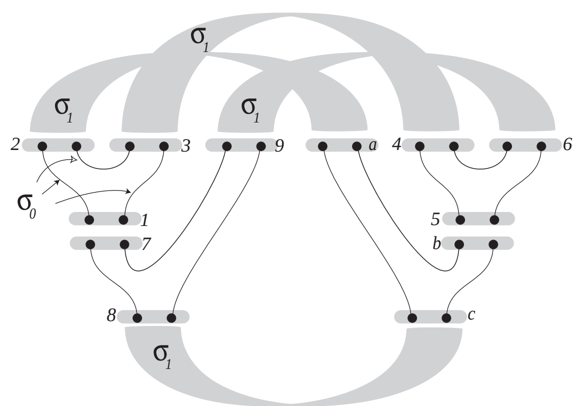
次元のシフト　n-殻 S に対し、$n-1$ 次元の殻 ΣS を $(\Sigma S)_i := S_{i+1}$ とおき、他のデータを自然に定めて定義できる（0 次元の部分の情報がなくなる）。

5.2 殻の図示

殻は定義をほぼ忠実に表現する木の形式がある。他に、リンクを見やすいように成分を配置するリンク図式がある。これは、低次元の情報を隠ぺいして高次元の様子を表示できる。たとえば、左上図の σ_0 の情報と 0 次元成分を隠ぺいして右上図のように表示できる。別の表現をすると、右上図は左上図の殻を 1 次元シフトしたものである。下の図は、左上図と同じ殻をリンク表現したものであるが 2 次元成分を面的に表現している。このように、リンク図式を用いた表現法は自由度が高く、うまく使うと状況を把握しやすいように表現できる。







5.3 殻の閉包

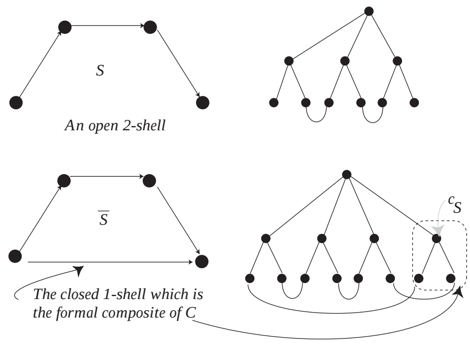
$n \geq 2$ について n-殻 S の閉包を定義する。S が閉じていれば $\overline{S} = S$ とおく。S が開いているときは、$n-1$ 次元に新しい成分 c_S を加え、σ_{n-2} の固定点のコピーを用意して S に付け加えて $\overline{S}$ とする。

$\overline{\sigma}_{n-2}$ は、σ_{n-2} の固定とそのコピーを対にして拡張する。$\overline{\sigma}_{n-3}$ 以外の定義は自明にできる。$\overline{\sigma}_{n-3}$ は、$\overline{\sigma}_{n-2}$ と σ_{n-3} のグラフをあわせたグラフの極大鎖の端点同志をリンクさせる。

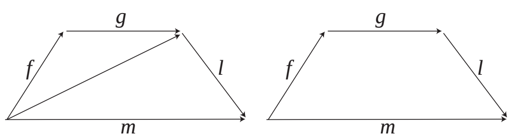
c_S に従属する $n-1$-殻を S の**形式的合成**(formal composite) といい $c(S)$ と書く。また、$\overline{S}$ を S の**形式的合成子**(formal composer) と呼ぶ。

1-殻の閉包は定義しない。

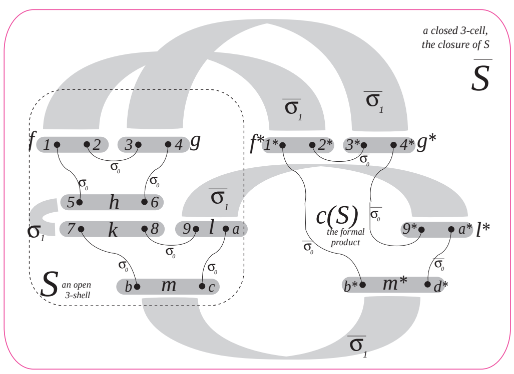
２次元開殻の閉包例　普通の圏での合成可能な射の列は 2 次元開殻を与える。

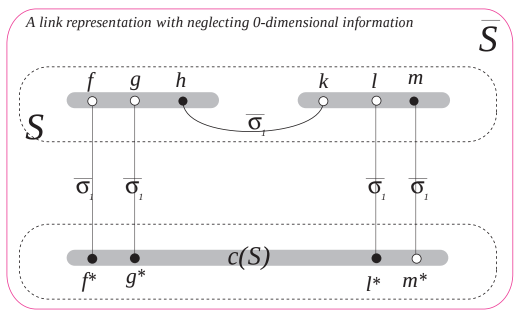


３次元開殻の閉包例　2 圏での 2 胞の合成図式は 3 次元開殻の例となる。下図の左の 3-開殻の形式的合成は右の閉じた 2 殻となる。



この場合の定義の仕方を詳しく書くと次のようになる。





5.4 殻のラベル付け

$\Sigma = (\Sigma_0, \Sigma_1, \cdots, \Sigma_n)$ を空でない集合の列とし、各 Σ_i には**共役**と呼ばれる、固定点のない involution $x \leftrightarrow x^*$ が与えられているとする。n 殻 S の Σ によるラベル付け λ とは、$S_{[n]}$ の部分集合 $|\lambda|$ から Σ への次数を保つ写像で、対となっている成分のラベルは共役となっているものをいう。すなわち、$\lambda(\sigma_i x) = \lambda(x)^*$, ただし、$i = n-2$ のときは、$x \neq \sigma_{n-2} x$ とする。

ラベル付け (S, λ_i) $(i = 1, 2)$ が $|\lambda_1| \subseteq |\lambda_2|$ かつ λ_1 が λ_2 の制限となっているとき、(S, λ_2) は (S, λ_1) の**拡大**といい、(S, λ_1) は (S, λ_2) を $|\lambda_1|$ に**制限した**ものという。

閉じた n-殻 S の上のラベル付け λ が全体定義されているとき (S, λ) を n-**胞**という。また $|\lambda| = S_{[n-1]}$ のときは、n-**枠**という。

次のいずれかの場合に (S, λ) を $n-1$-**次元結合図式**という。

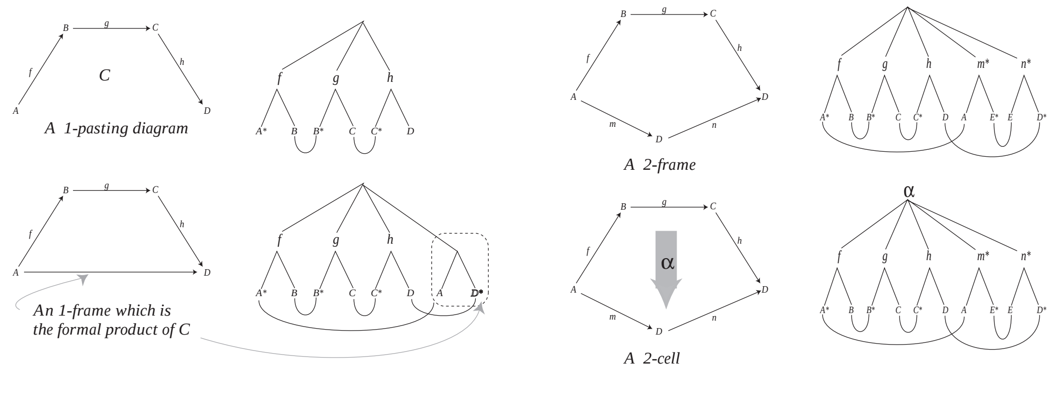
- S が開いていて、$|\lambda| = S_{[n-1]}$
- S が閉じていて、$n-1$ 次元成分がただ一つで、$|\lambda| = S_{[n-2]}$.

0-胞は $(S_0 = \{ r_S \}, \lambda(r_S) \in \Sigma_0)$ で与えられ、Σ_0 の元とほぼ対応する。

$n = 1$ のときは、任意の 0 次元結合図式、すなわち、S_0 にラベルが付けられたもの、を 1-枠と呼ぶ。従って 1-枠は、有限集合 S_0 と、写像 $\lambda : S_0 \to \Sigma_0$ にほぼ対応し、その同型類は S_0 上の語と 1 対 1 に対応する。

n-胞 $c = (S, \lambda)$ を $S_{[n-1]}$ に制限して得られる n-枠を c **の境界**と呼び ∂c と書く。

例



5.5 結合図式の Baez-Dolan 式の表現

$n-1$ 次元結合図式は次のように定義することもできる。閉じた n-殻 S の $n-1$ 成分 x が**従属的**であるとは、次のいずれか

- $S_{n-1} = \{ x \}$ である、
- S から S^x を除いて得られる開いた n-殻の閉包が S と同型となる

が成り立つこととする。

補題 5.1 *$n-1$ 次元結合図式は、閉じた n-殻 S のラベル付け (S,λ) で、$S_{n-1} \setminus |\lambda|$ が従属的な元ただ一つからなるもの (これを BD 結合図式という) とは 1 対 1 に対応する。*

証明. まず、$n-1$ 次元結合図式 (S,λ) で、S が閉じていて $|\lambda| = S_{[n-2]}$ が成り立つものは、定義より、BD 結合図式に他ならない。

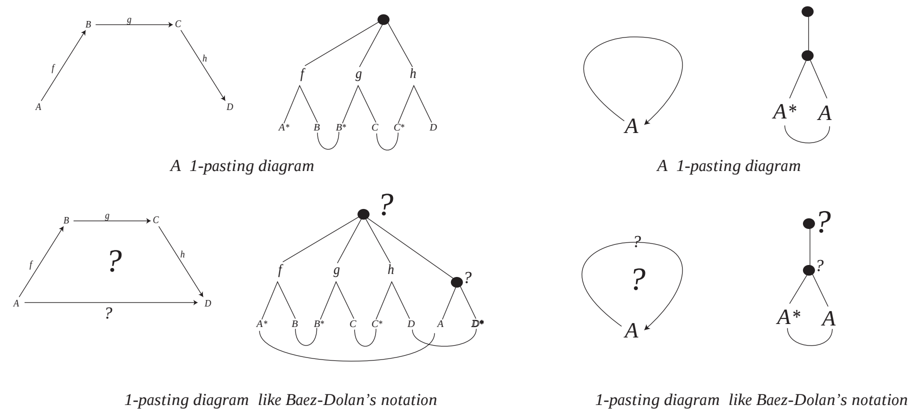
次に、開いた $n-1$ 次元結合図式 (S,λ) に対し、$(\overline{S},\lambda)$ は、

$$\overline{S}_{n-1} \setminus |\lambda| = \{ c_S \}$$

より明らかに BD 結合図式である。

逆に (S,λ) が $n-1$ 次元の BD 結合図式であり、$n-1$ 次元成分は 2 個以上あるとする。$S_{n-1} \setminus |\lambda| = \{ x \}$ であるとするとき、$S \setminus S^x$ は開いた n 次元の殻となり、しかもその閉包は定義により S となる。 ∎

Baez-Dolan の記法をリンク図にも導入して、結合図式を以下のようにも書く。



5.6 高次元 hypergraph

ラベル集合自身がラベル付き殻となっているものを hypergraph という。詳細な定義は以下のとおり：$n \leq \omega$ について $H = (H_0, \cdots, H_n, *, \partial)$ が *n-hypergraph* であるとは、

- 各 H_i は**共役**と呼ばれる固定点のない involution $x \leftrightarrow x^*$ を持つ。
- 各 $c \in H_k$ $(n \geq k > 0)$ は**境界**と呼ばれる k-枠 $\partial c = (S,\lambda)$ を持つ。ただし、ラベル集合は $H_{[k-1]}$ であり、ラベルは次の**整合性条件**をみたす：
  - $x \in S_i$ $(i < k)$ について、$\partial\lambda(x) \simeq (S^x, \lambda|S^x)$. 言葉でいえば、各 i 次元成分 x について、そのラベル $\lambda(x) \in H_{n-1}$ の境界は、x に従属する i-殻 S^x の $i-1$ 骨格 $S^x_{[i-1]}$ に λ を制限したものと同型になる。

- $\partial(x^*) = \partial(x)^*$.