6 高次元 hypercategory

合成と同値性を合体させた普遍胞の概念を導入して hypercategory を定義する。

6.1 定義

ω-hypergraph $(H_0, H_1, \cdots, *, \partial)$ に、以下の条件が成り立つように**普遍胞**と呼ばれる胞を指定したものを *ω-hypercategory* と呼ぶ。i 次元普遍胞の全体を $U_i \subseteq H_i$ $(i \geq 0)$ と書く。

HC0 各々の胞は正負の符号を持ち、共役は符号を入れ替える。

HC1 普遍胞の共役は普遍である。

HC2-a k 次元結合図式 $P = (S, \lambda)(k > 0$ が**同符号**であるとき、すなわち、$\left\{ \lambda(x) \;\middle|\; x \in S_{k-1} \right\}$ が同じ符号を持つとき、S の閉包を殻とする $n+1$ 次元普遍胞 U で (S, λ) の拡張となっていて P と同符号のものがある (ただ一つとは限らない)。これを P **の普遍合成子**(a universal composer) と呼ぶ。

HC2-b S の形式的合成である閉じた $n-1$ 次元殻 $c(S)$ に P の普遍合成子 U を制限して得られる $n-1$ 胞は P と異符号となる。その共役を U **で構成された合成胞**(a composite composed by U) と呼び $c_U(P)$ と書く。

HC3 k 次元結合図式 (S, λ) $(k > 0)$ が同符号で普遍であるとき、すなわち、$\lambda(x)$ $(x \in S_{k-1})$ がすべて普遍であるとき、これより、普遍的に作られた合成胞は普遍胞である。(ただし、k-次元部分が空の結合図式も普遍であると呼ぶ。)

HC4 普遍胞 U には、**同符号**の普遍胞 V があって

$$\partial V = (\partial U)^*$$

をみたす。これを U **の転置**という。U の転置は U から唯一定まるわけではないが $U^\dagger$ とあらわす場合がある。[1]

hypercategory の次元　次元が n よりも大きな胞はすべて普遍であるとき、n 次元以下であるという。

weakness　次元が k より大きい結合図式の普遍的に作られた合成胞がただ一つしかないとき、

hypercategory は k-weak であるという。(すなわち、k 次元までの合成はただ一つには定まらない)

[1] U^* も

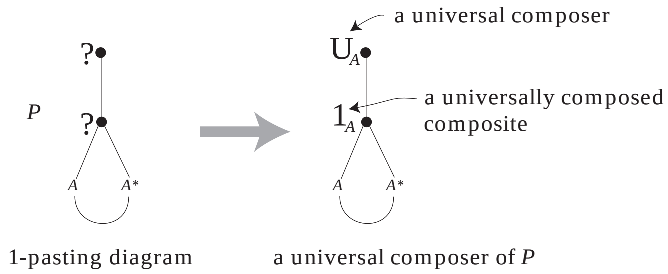
$$\partial(U^*) = (\partial(U))^*$$

をみたすが、符号が U とは逆であることに注意。

6.2 0 弱 1 次元 hypercategory

$\mathcal{H}$ を 0 弱 1 次元 hypercategory とする。その正の 1 胞 f はすべて $\partial = (a, b^*)$ $(a, b > 0$) という境界を持つとする。

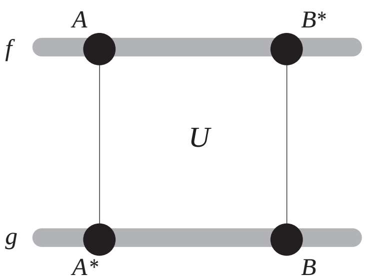
恒等射 次の 1-結合図式はただ一つの普遍的に定まる合成 $1_A : A \to A$ を持つ。 これは普遍的な 1 胞となる。

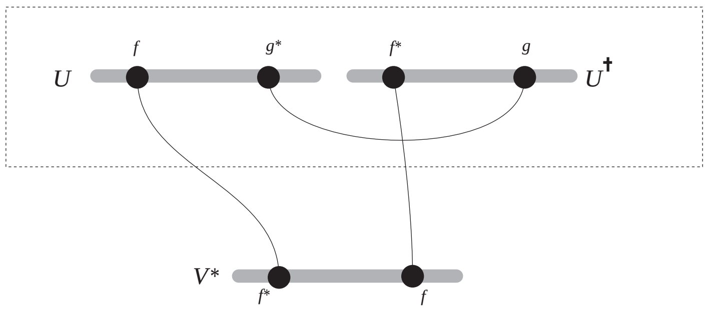


合成 通常の結合可能な図式は、同符号の 1-結合図式を与えるので、ただ一つの普遍的に定まる合成を持つ。これの共役として射の合成が定義される。

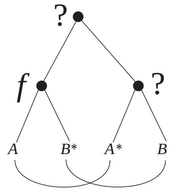
補題 6.1 普遍 *2* 胞 $U : f \to g : A \to B$ *(*左下図参照*)* があるとき、$f = g$ となる。

右下図は点線部分の 2 結合図式の普遍合成子である。それによる合成 $V : f \to f$ は HC3 により普遍である。



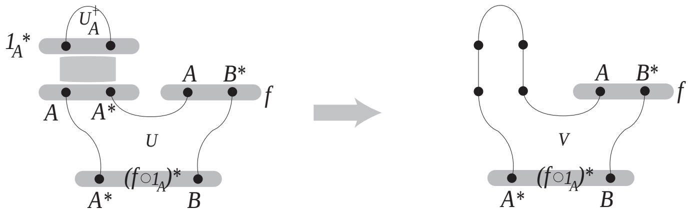


これより、f, g はともに次の 1 結合図式の合成で普遍的に定まるものとなる。



0 弱の条件より 1 結合図式の普遍的に定まる合成の唯一性より $f = g$.

- 単位律の証明は、次の図よりわかる。



universal 2-pasting diagram P　　a composite of P

- 結合律の証明は、次の図よりわかる。