# 8 自由 hypercategory

## 8.1 約束と記号

$n$-shell を定義するとき、$n$ 次元成分については言及しない。

$S$ を $n$-shell とするとき、$S^i := S_{n-i}$. $S^i$ の要素は**余次元** $i$ **である**という。$S$ が open のとき、$\sigma_{n-2}$ で固定されるとき**外的**、そうでないとき**内的**と呼ぶ。内的な成分は $i \leq n-2$ について $i$-対をなす。外的な成分も $i \leq n-3$ ならば $i$-対をなす。

$S$ は木と見なし、$s \in S^i$ を冗長に $s_1 s_2 \cdots s_{i-1} s$ と書く。ただし、$s_k$ は $s_{k+1}$ の boss である。root は $\emptyset$ と書く。$\pi(s_1 s_2 \cdots s_i s) = s_1 s_2 \cdots s_i$ である。

$i$-成分 $s$ について

$$S^s := \left\{ s \;\middle|\; s \text{ を prefix にもつ成分} \right\}.$$

open な $S$ の形式的合成である $n-1$-shell を $\partial S$ と記号を変えて書く。これは、$S$ の外的な成分を集めたものと考えることができる。（上の約束により $n-1$-成分は自明の補う。）$n \geq 3$ のとき $n-3$ リンクだけ自明ではないが、$n-2$ リンクと $n-3$ リンクを交互にたどることで定義する。

$S$ の closure は $S$ と $\partial S$ の直和となる。$n-2$ リンクは、$\partial S$ 同志を対にする。

$\Sigma_0, \cdots, \Sigma_n$ を hypergraph とする。したがって $\Sigma_i$ は共役を持ち、$i = 1, \cdots, n$ について

$$\partial : \Sigma_i \to \mathrm{Frame}_i(\Sigma_{0..i-1})$$

がある。

$i$-edge $\alpha$ の境界 $\partial\alpha$ の台である $i$-shell を $|\alpha|$ と書く。$\partial\alpha$ の $s \in |\alpha|$ に対するラベルを $\alpha_s$ と書く。また、$\alpha_\emptyset = \alpha$ とおく。すると

$$\alpha = (\alpha_s ; s \in |\alpha|)$$

と表示できる。

## 8.2 自由 strict hypercategory

$\Sigma = \Sigma_{0..n-1}$[1] を $n-1$-hypergraph とし、$\partial : X \to \mathrm{Frame}_n(\Sigma)$ をその上の $n$-ハイパー辺集合とする。このとき

$$\partial : PD_n(\Sigma, X) \to \mathrm{Frame}_n(\Sigma)$$

により、$PD_n(\Sigma, X)$ は $n$-ハイパー辺集合となる。これは $\Sigma$ 上の $n$-ハイパー辺集合の圏 $H_n/\Sigma$ の自己函手

$$T : (X \xrightarrow{\partial} \mathrm{Frame}(\Sigma_{0..n-1})) \mapsto (PD_n(\Sigma_{0..n-1}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Frame}(\Sigma_{0..n-1}))$$

[1] $\Sigma_0, \cdots, \Sigma_{n-1}$ の略記

となる。

$\mu : TT \to T$ が以下のように定義でき monad $(T, \mu, \eta)$ を得る。ただし、$\eta$ は $\xi \in X$ をそのまま $n+1$ -cell $\xi' = \xi$ と見る演算。

$\xi \in TTX$ とすると、

$$\xi = (\xi_I ; I \in |\xi|)$$

で、$i \in |\xi|^1$ に対し $\xi_i \in TX$. したがって

$$\xi_i = (\xi_{iJ} ; J \in |\xi_i|).$$

$j \in |\xi_i|^1$ に対して

$$\xi_{ij} \in X.$$

そこで $n$-shell $|\mu\xi|$ を

- $|\mu\xi|^1 = \coprod_{i \in |\xi|^1} |\xi_i|^1$
- $j \geq 2$ については $|\mu\xi|^j = |\xi|^j \coprod \coprod_{i \in |\xi|^1} |\xi_i|^j$

と定義し、$j > 2$ のときは余次元 $\geq j$ の成分はそれぞれの属している *shell* で $j$-リンクで対をなしているものに $j$-リンクさせる。$n-2$-リンクは次のように定義する。余次元 2 の成分 $s$ について

- $|\xi_i|$ で内的なときは、そこのリンクで対応させ、
- $|\xi_i|$ で外的なとき、それに対応する $s' \in \partial|\xi_i|$ が $|\xi|$ で内的なときは、それに対応する $s'' \in \partial|\xi_j|$ をとり、$s''$ に対応する外的な $s''' \in |\xi_j|$ を $s$ に対応させる。

この monad の algebra$(H, \alpha : TH \to H)$ を $\Sigma$ 上の strict $n$-hypercategory という。

## 8.3 $n$-hypercategory の定める $n+1$-hypergraph

$(\Sigma_{0..n-1}, H^+, \alpha : TH^+ \to H^+)$ が strict $n$-hypercategory のとき、$n$-結合図式 $y \in TH$ は $n+1$ 枠 $\overline{y}$ を定める: $\overline{y}$ は open $n+1$-shell $|y|$ の closure, 唯一決まっていない $n$-component のラベルは $\alpha(y)^* \in H^-$ とすればよい。

そこで

$$\partial : PD_n(\Sigma_{0..n-1}, H) \ni y \mapsto \overline{y} \in Frame_{n+1}(\Sigma_{0..n-1}, H)$$

とおくと、$n+1$ hypergraph

$$(\Sigma_{0..n-1}, H, PD_n(\Sigma_{0..n-1}, H))$$

を得る.

これを、$H$ の half lifted hypergraph と呼ぶ。さらに、

$$\left\{ \overline{y}^{\dagger} \;\middle|\; y \in PD_n(\Sigma_{0..n-1}) \right\}, \qquad \partial\overline{y}^{\dagger} = (\overline{y})^{*}$$

も正の $n+1$ edge として追加したものを $H_{n+1}(\Sigma_{0..n-1}, H)$ と書き、$H$ の lifted hypergraph という。

## 8.4 グラフ書き換えの 2-hypercategory

$\Sigma = (\Sigma_{0,1,2})$ を 2-hypergraph とする。ただし、

$$\Sigma_i = \Sigma_i^{+} \coprod \Sigma_i^{-} \quad (i = 0, 1)$$

で共役は符号を変えるとする。

- $(\Sigma_0, \Sigma_1^{+})$ で自由 1-hypercategory $(\Sigma_0, \widetilde{\Sigma}_1 := PD_1(\Sigma_0, \Sigma_1^{+}) \coprod PD_1(\Sigma_0, \Sigma_1^{-}))$ をつくる。
- この lifited hypergraph $C_2(\Sigma_0, \widetilde{\Sigma}_1)$ と $\Sigma_2 \to F\mathrm{rame}_2(\Sigma_0, \Sigma_1) \to F\mathrm{rame}_2(\Sigma_0, \widetilde{\Sigma}_1)$ をあわせて 2-hypergraph $(\Sigma_0, \widetilde{\Sigma}_1, C_2(\Sigma_0, \widetilde{\Sigma}_1) \bigcup \Sigma_2)$ を考える。
- この 2-hypergraph が定める free 2-hypercategory を $\mathcal{H}(\Sigma_{0..2})$ とする。
- $F\mathrm{rame}_2(\Sigma_0, \widetilde{\Sigma}_1)$ の元 $\alpha$ は 2 つの pasting diagrams

  $$\alpha^{+}, \alpha^{-} \in PD_1(\Sigma_0, \Sigma_1^{+})$$

  の対と同型 $\partial\alpha^{+} \simeq \partial\alpha^{-}$ からなる。
- この 2-cell $\alpha$ の境界 $\partial\alpha \in F\mathrm{rame}_2(\Sigma_0, \widetilde{\Sigma}_1)$ は pasting diagram の対 $\langle \partial^{+}\alpha, \partial^{-}\alpha \rangle$ $(\partial^{\pm}\alpha := (\partial\alpha)^{\pm}))$ を与える。$\Sigma_2$ をグラフ書き換えと考え、それをある手順で pasting diagram $\partial^{+}\alpha$ に施すと $\partial^{-}\alpha$ となることを意味する。

上で、$\partial^{+}\alpha \simeq \partial^{-}\alpha$ という同値関係を入れることにより、自由 1-hypercategory を割って 1-hypercategory を定義できる。これは、2-hypergraph を、1-hypercategory の生成元と関係式による表示と見ることを可能にする。