

超準数学入門

辻下 徹

1996/7

目 次

1	論理記号	4
2	集合論の概要	5
3	内的集合論の公理	8
4	理想化公理の帰結.	9
5	転移公理の帰結.	9
6	標準化公理	12
7	実数	15
8	実数列とその極限	22
9	連続性	26
10	微分可能性	31
11	積分	34
12	常微分方程式	36

	2
13 チューリング機械	38
14 チューリング機械の非標準的な使い方.	41
15 内的集合論の無矛盾性について	43

序

1. 講義の目的：微積分の諸定理は無限小量に基づく直観的議論により納得できることが多いが、それを証明するには一旦直観的議論を忘れて ϵ - δ 式の精密な議論によってもう一度証明を見い出さなければならぬことになっている。 ϵ - δ 式の議論も一旦習得すれば独特の魅力もあり何の不都合ないようにみえるかもしれないが、実はその議論の間接性は生の解析的諸現象を心理的に遠ざけてしまう危険性が大きいのである。

一方無限小の量に基づく発見的議論は直観に基づくことが多く、それに基づく論証はしばしば誤りに導くことが多い。事実、無限小の量を用いて信頼の置ける議論をする方法は 1960 年代に数理論理学の進歩によって初めて発見されたのであった。

この講義の直接の目的は、「無限小量の概念」に基づいて正確な議論をする方法を習得して頂くことであるが、それだけでなく、それを通して「無限小量の概念」のように一見すると辻褄のあわないようなものが精密な議論の土台となるありさまを経験することにより数学という学問のもつ役割の一つ - 形式化しにくい直観的には明白な概念を学問の武器に昇格させるという役割 - を知って頂くことが講義の本当の目的である。

2. 参考書：内的集合論に基づく超準解析の初等的な定式化は Nelson によって発見された。この講義は、その入門的解説書

(a) Robert, A.: Nonstandard Analysis, John Wiley 1985, ISBN 0-471-91703-6.

(b) Nelson, E.: Radically elementary probability theory, Princeton University Press 1987, ISBN 0-691-08473-4.

を参考にする。

超準解析の日本語のテキストも多い。残念ながら内的集合論に基づいてはいないが超準解析による議論を参考にすることはできる。

- (a) キースラー：無限小解析の基礎、東京図書 1986, ¥2500, ISBN 4-489-0982-7..
- (b) 竹内外史：無限小解析と物理学、遊星社 1985, ¥2600, ISBN 4-7952-6854-1.
- (c) 釜江哲朗:超準的手法にもとづく確率解析入門、朝倉書店 1993, ISBN 0-471-91703-6.

1 論理記号

(a) 命題論理.

正しいか否かが判定できる主張を命題という。命題を表わす記号を命題変数という。一般に命題 P が正しいことを単に「 P である」という。 P, Q が命題であるとき、合成命題が次のように作れる。

$P \wedge Q$	P と Q がともに正しいとき正しい
$P \vee Q$	P または Q が正しいとき正しい
$P \Rightarrow Q$	「 P であるとき Q である」とき正しい (これは $\neg P \vee Q$ と論理同値.)
$\neg P$	P ではないとき正しい
$P \Leftrightarrow Q$	P が正しいことと Q が正しいことは同じとき正しい

(b) 述語論理.

命題がパラメータを含む時、述語という。パラメータを x とあらわし、それを含むかもしれない述語を $P(x)$ とあらわす。 x に具体的なものを「代入」すると命題が得られる。パラメータは一般に複数あってもよい。述語から命題を作る方法が2とおりある：

$\forall x.P(x)$	すべてのもの x について $P(x)$ が正しい
$\exists x.P(x)$	$P(x)$ が正しいような x が存在する

通常は、考える個体はある条件を満たすものだけ考える：

$\forall x \in A.P(x)$	集合 A のすべての元 x について $P(x)$ が正しい。
$\exists x \in A.P(x)$	$P(x)$ が正しいような x が A の中に存在する。

(c) 否定文の作り方:

$\neg R$	$\neg$ を中に移したもの
$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
$\neg(P \Rightarrow Q)$	$P \wedge \neg Q$
$\neg\neg P$	P
$\neg\forall x \in A.P(x)$	$\exists x \in A.\neg P(x)$
$\neg\exists x \in A.P(x)$	$\forall x \in A.\neg P(x)$

2 集合論の概要

集合論の基本的な概念と記号を復習する。

- (a) 基礎概念: $x \in y$: x は集合 y の要素.
 (b) 外延主義. $\{ x \mid P(x) \}$: 性質 $P(x)$ を満たす x の集まり。(哲学では概念 P の外延(extension) という.)

i. 性質の外延による表現.

- 性質は $x \in A$ という形で表現できる:

$$x \in \{ x \mid P(x) \} \Leftrightarrow P(x),$$

- $x \in X, y \in Y$ についての 2 項関係 $R(x, y)$ は $\langle x, y \rangle \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \subseteq X \times Y$) という形で表現できる、

$$\langle x, y \rangle \in \{ \langle x, y \rangle \mid R(x, y) \} \Leftrightarrow R(x, y).$$

ii. 外延が性質を決める.

$$(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \{ x \mid P(x) \} = \{ x \mid Q(x) \}.$$

- iii. **Russell's paradox**: $y := \{ x \mid x \notin x \}$ を集合とすると矛盾する。($y \in y$ ならば $y \notin y$, $y \notin y$ ならば $y \in y$. 従って、 $\neg(y \in y \vee y \notin y)$ i.e. $y \notin y \wedge \neg y \notin y$ が成り立ち矛盾。)

(c) 派生概念.

i. $x \subseteq y$: x は y の部分集合.

$$\text{定義: } x \subseteq y \equiv \forall u [u \in x \Rightarrow u \in y].$$

ii. $\emptyset$: 空集合.

iii. $\{ x, y \}$: x, y を要素とする対集合(非順序対). $u = x \vee u = y$ の外延.

iv. $X \times Y := \{ \langle x, y \rangle \mid x \in X, y \in Y \}$ ($\langle x, y \rangle$ は x, y の順序対で

$$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$$

を満たす. von Neuman による実現:

$$\langle x, y \rangle := \{ x, \{ x, y \} \}.$$

v. $\text{pow } x := \{ y \mid y \subseteq x \}$: x のべき集合.

- vi. $f : x \rightarrow y : f$ は集合 x から y への写像. f の外延はそのグラフ:

$$G(f) := \{ \langle u, f(u) \rangle \mid u \in x \}.$$

(d) ベキ集合の代数的構造.

- i. $\text{pow } X$ 上のブール演算 (a, b は X の部分集合).

A. 集合和: $a \cup b := \{ x \mid x \in a \vee x \in b \}$

B. 集合積: $a \cap b := \{ x \mid x \in a \wedge x \in b \}$

C. 集合差: $a \setminus b := \{ x \mid x \in a \wedge x \notin b \}$

D. 補集合: $a^c := X \setminus a$.

- ii. 基本的法則

- A. 自明に見える性質

可換性: $x \cap y = y \cap x, x \cup y = y \cup x$

結合性: $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z),$

$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$

B. 分配法則: $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z), x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z).$

C. De Morgan の法則: $(x \cup y)^c := x^c \cap y^c, (x \cap y)^c := x^c \cup y^c,$

- iii. ベン図法について

(e) 集合論の公理 (Zermelo–Fraenkel の公理系)

- i. 外延性公理: 要素が同じ集合は等しい。すなわち

$$\forall x \forall y [x = y \Leftrightarrow \forall u [u \in x \Leftrightarrow u \in y]].$$

- ii. 集合形成公理 (既に存在する集合から新しい集合を形成する)

- A. 内包性公理: 任意の集合 a と、条件 P について x の部分集合 $\{ x \mid x \in a \wedge P \}$ が存在する。

- B. 対集合は存在する。

- C. 和集合は存在する。

- D. ベキ集合は存在する。

- iii. 存在公理:

- A. 空集合が存在する。

- B. 無限集合が存在する。

- iv. 正則性公理 (有基性公理)

- v. 選択公理

- vi. 置換公理 (Fraenkel の公理)... 普通は意識しなくてよい。
- (f) 集合論の位置付け. 現代数学は集合論に「帰着」されていると考えられている。すなわち、すべての数学的な概念は集合論の言葉で表現でき、数学的定理は集合論の公理系から導けると信じられている。

3 内的集合論の公理

- (a) 新しい述語. x は標準的である。「標準的」という述語を使わないで定義できる概念や対象は古典的であるという。普通の数学の概念・対象はすべて古典的である。

- (b) 記号.

- i. $\forall^s x \varphi(x) \equiv \forall x [x \text{ が標準的} \Rightarrow \varphi(x)]$ (標準的な x はすべて φ を満たす。)
- ii. $\forall^f x \varphi(x) \equiv \forall x [x \text{ は有限} \Rightarrow \varphi(x)]$ (有限集合 x はすべて φ を満たす。)
- iii. $\exists^s x \varphi(x) \equiv \exists x [x \text{ が標準的} \wedge \varphi(x)]$ (φ を満たす標準的な x がある。)
- iv. $\exists^f x \varphi(x) \equiv \exists x [x \text{ は有限} \wedge \varphi(x)]$ (φ を満たす有限集合 x が存在する。)

これらを組み合わせて $\forall^{sf}, \exists^{sf}$ などを用いる。このとき、次が成り立つ。

- i. $\neg \forall^s x \varphi(x) \Leftrightarrow \exists^s x \neg \varphi(x),$
- ii. $\neg \exists^s x \varphi(x) \Leftrightarrow \forall^s x \neg \varphi(x).$

- (c) 内的集合論の公理. 通常の集合論の公理に次の 3 公理を追加する。これらの公理の意義は、今後詳しく説明する。

I (理想化公理 Idelization) 任意の古典的な 2 項関係 $R(x, y)$ に対して

$$\boxed{\forall^{sf} F \exists x \forall y [R(x, y)] \Leftrightarrow \exists x \forall^s y [R(x, y)]}$$

注意

- R の定義域・値域は標準的である必要はない: $R \subseteq X \times Y$ で X, Y が古典的に与えられればよい。たとえば、 $\{x \in \mathbf{R} \mid x < \omega\}$ で ω が超標準的であってもかまわない、なぜならば論理式 $x < \omega$ は古典的だからである。

S (標準化公理 Standarization) 任意の古典的な集合 E と任意の述語 $P(x)$ について

$$\boxed{\exists^s A \subseteq E \forall^s x [x \in A \Leftrightarrow x \in E \wedge P(x)]}.$$

T (転移公理 Transfer) $F(x, y_1, \dots, y_m)$ を古典的な述語とする、ただしその自由変数は $\{x, y_1, \dots, y_m\}$ に含まれるとする。 $a_1, \dots, a_m$ が標準的であるとき

$$\boxed{\forall x F(x, a_1, \dots, a_m) \Leftrightarrow \forall^s x F(x, a_1, \dots, a_m)}.$$

4 理想化公理の帰結.

$$\boxed{\forall^s F \exists x \forall y \in F [R(x, y)] \Leftrightarrow \exists x \forall^s y [R(x, y)]}$$

- (a) 命題. 超準自然数 (標準的でない自然数) が存在する.
- (b) 命題. 無限集合はすべて超準元を含む.
- (c) 命題. どの集合もその標準的な元をすべて含むような有限部分集合を持つ.

証明. E を集合とし、その有限部分集合の全体のなす集合を $\text{pow}^f E$ とする。有限部分集合という性質は古典的だから

$$\text{pow}^f E \equiv \{ s \in \text{pow } E \mid s \text{ は有限集合} \}$$

はたしかに存在する。さて、 $\text{pow}^f E$ と E の間の古典的關係 S

$$S(X, e) \equiv e \in X$$

に理想化公理を適用する。まず、条件は自明に成立する。実際、 E の任意の標準的な有限部分集合 F に対して $F \in \text{pow}^f E$ 自身が

$$\forall x \in F [S(F, x)]$$

を満たす。したがって公理より $\forall^s x \in E [S(F, x)]$ を満たす有限部分集合 $F \subseteq E$ が存在することがわかる。 ■

5 転移公理の帰結.

$F(x, y_1, \dots, y_m)$ を古典的な述語とする、ただしその自由変数は $\{ x, y_1, \dots, y_m \}$ に含まれるとする。 $a_1, \dots, a_m$ が標準的であるとき

$$\boxed{\forall x F(x, a_1, \dots, a_m) \Leftrightarrow \forall^s x F(x, a_1, \dots, a_m).}$$

- (a) 意味. 古典的な条件が標準的な元について成立していることがわかれば、すべての元についても成立していることがわかる。
- (b) 存在命題への適用. $P(x)$ が古典的であり、パラメータがないとき、公理の帰結

$$\forall x \neg P(x) \Leftrightarrow \forall^s x \neg P(x)$$

と

$$\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg p(x)$$

より

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow \exists^s x P(x).$$

すなわち、古典的な条件を満たす元が存在すれば、必ずその条件を満たす標準的な元が存在することがわかる。

(c) 定理. 標準的写像は標準的な元を標準的な元に移す.

証明. $f: X \rightarrow Y$ を標準的な写像とする。さらに $a \in X$ は標準的であるとする。このとき $\langle a, y \rangle \in f$ という論理式は古典的で、出現するパラメータ f, a は仮定より標準的なので、転移公理により

$$\exists^s y \in Y[\langle a, y \rangle \in f] \Leftrightarrow \exists y \in Y[\langle a, y \rangle \in f].$$

したがって、 $y = f(a)$ のとき $y' = f(a)$ となる標準的な y' が存在するが f は写像なので $y = y'$ となる。 ■

(d) 「有限」についての補足.

i. 個数が標準的な有限集合 条件として、

$$** \quad P(x) \equiv x = a_1 \vee x = a_2 \vee \cdots \vee x = a_n$$

というものをとれば、これは古典的であるから集合

$$\{ a_1, \dots, a_n \} \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \{ x \mid P(x) \}$$

が定義される。この集合の個数は a_i が相異なれば n 個であり、この n は実際には具体的な数字であり、標準的である。この意味で、標準的な数はわれわれが普通に使う数である。

ii. 有限集合 これに対して、超準数学での有限性は、有限の特徴づけ

$$X \text{ が有限} \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \forall f: X \rightarrow X [f \text{ は単射} \Rightarrow f \text{ は全単射}]$$

を用いて定義される。

これだけの条件からは、 X が $\{ a_1, \dots, a_n \}$ という形にかけるはいえない (n は標準的な数)。しかし、 $\{ a_1, \dots, a_n \}$ という形の集合を n が非標準的な自然数についても定義することができることがあとでわかる (古典的な写像 $i \mapsto a_i$ の像として)。

標準的な有限集合の個数は標準的である。(有限集合に個数を対応させる写像は古典的に定義される。)

- iii. 定理 (個数が標準的な有限集合が標準的であるための必要十分条件) n が標準的自然数のとき、

$$X := \{ a_1, \dots, a_n \} \text{ が標準的} \Leftrightarrow a_i \text{ はすべて標準的}$$

これは、次の定理の特別な場合である。

- iv. 定理 集合 E のすべての元が標準的である $\Leftrightarrow E$ は標準的な有限集合。

証明.

$$\begin{aligned} \exists x \in E \forall y \in E [x \neq y] &\Leftrightarrow \forall^{sf} F \subset E \exists x \in E \forall y \in F [x \neq y] \\ &\Leftrightarrow \forall^{sf} F \subset E \exists x \in E [x \notin F] \\ &\Leftrightarrow \forall^{sf} F \subset E [E \not\subset F] \\ &\Leftrightarrow \forall^{sf} F \subset E [E \neq F] \end{aligned}$$

■

6 標準化公理

任意の古典的な標準的集合 E と任意の述語 $P(x)$ について

$$\exists^s A \subseteq E \forall^s x [x \in A \Leftrightarrow x \in E \wedge P(x)].$$

[6.2.1] これにより、任意の述語 $P(x)$ と任意の標準的な集合 E から、次のような標準的な部分集合 ${}^S\{x \in E \mid P(x)\}$ が存在することがわかる：

$$\forall^s x \in E [x \in {}^S\{x \in E \mid P(x)\} \Leftrightarrow P(x)].$$

これを、 P が間接的に定める部分集合という。

[6.2.2] 例：

$$[6.2.2(1)] \quad {}^S\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ は標準的}\} = \mathbb{N}.$$

$$[6.2.2(2)] \quad {}^S\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ は標準的でない}\} = \emptyset.$$

[6.2.3] 注意. 上の例からわかるように $x \in E$ が標準的でない場合は次のいずれも実際に可能である。

$$[6.2.3(1)] \quad x \in {}^S\{x \in E \mid P\} \text{ であるが } P(x) \text{ ではない.}$$

$$[6.2.3(2)] \quad x \notin {}^S\{x \in E \mid P\} \text{ であるが } P(x) \text{ である.}$$

[6.2.4] 命題 (写像の間接的定義). X, Y を標準的な集合とし、 $R(x, y)$ は X の元と Y の元の間関係であって

$$(7-1) \quad \forall^s x \in X \exists^s y \in Y [R(x, y)]$$

すなわち、 X の任意の標準的な元に対して、 Y の標準的な元がただ一つ R のもとで対応している (i.e. $R(x, y)$ が成り立つ) ようなものとする。このとき、

$$y = f(x) \Leftrightarrow R(x, y)$$

が任意の標準的な x, y について成り立つような標準的な写像 $f: X \rightarrow Y$ がただ一つ存在する。

証明.

$${}^S R := {}^S\{(x, y) \in X \times Y \mid R(x, y)\} \subseteq X \times Y$$

とおくと、任意の標準的な x, y に対して $(x, y) \in {}^S R$ が成り立つので転移公理から任意の x, y に対して $(x, y) \in {}^S R$ が成り立つ。すなわち

$$\forall x \in X \exists y \in Y [(x, y) \in {}^S R]$$

が成り立つ。従って、これは標準的な写像 $f : X \rightarrow Y$ のグラフとなる。
 唯一性の証明： $g : X \rightarrow Y$ も標準的な元 (x, y) について

$$y = g(x) \Leftrightarrow R(x, y)$$

を満たすとする。標準的な元 x について $y = f(x)$, $y' = g(x)$ とおくとこれらは標準的な元で $R(x, y)$ かつ $R(x, y')$ が成り立つので、(7-1) より $y = y'$ となる。すなわち、 $\forall^s x \in X [f(x) = g(x)]$ が示される。従って推移公理より $\forall x \in X [f(x) = g(x)]$ となるので $f = g$ が示される。 ■

[6.2.5] 例.

[6.2.5(1)] 非標準的な個数の数の和。標準的な実数列 $a = (a_i)$ があるとする。すなわち、 $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ は標準的な写像とする。このとき、各標準的な自然数 n に対して標準的な数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を対応させる対応を R とすると、これは上の定理の仮定を満たす。従って、標準的な写像 $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ で、標準的な自然数 n については

$$S(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

となるものがある。 $S(n)$ を $\sum_{i=1}^n a_i$ と記す。従って非標準的な自然数 n についても $\sum_{i=1}^n a_i$ は意味をもつことになる。

注意. これは $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ と混同してはいけない。これは存在することもあればそうでないこともある。しかし、非標準的な自然数 ω に対して $\sum_{i=1}^{\omega} a_i$ はどのような数列 (a_i) についても確定するのである。この両者の関係の分析は、超順解析の解析学への応用の最初のステップの一つである。

[6.2.5(2)] 非標準的な個数の数の積。同様に、 $\prod_{i=1}^n a_i$ も意味をもつ。

[6.2.5(3)] 操作の非標準的回数の繰り返し。 $f : X \rightarrow X$ を標準的な写像とするとき、標準的な自然数 n については f の n 回合成 f^n が定義される。従って、任意の自然数 n についても n 回合成 f^n が定義される。

[6.2.5(4)] 非標準的な区間での積分。 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を標準的な積分可能関数とする。このとき、標準的な実数 a, b に対して、標準的な実数 $\int_a^b f(x)dx$ が対応するので任意の実数 a, b についても $\int_a^b f(x)dx$ が定まる。

[6.2.6] 古典的命題の相対化. $R(x, y, z, w)$ を古典的な述語とするとき

$$\forall x \exists y \forall z \exists w [R(x, y, z, w)] \Leftrightarrow \forall^s x \exists^s y \forall^s z \exists^s w [R(x, y, z, w)]$$

が成り立つ。これは外側から転移公理を適用することで示される。この例で示されるように古典的述語から構成された閉じた命題（すなわち各自由変数を $\forall$ または $\exists$ で束縛した命題）は、 $\forall \mapsto \forall^s, \exists \mapsto \exists^s$ とすべて置き直したものと論理同値である。

6.3 標準的写像についての外延性定理. $f, g : X \rightarrow Y$ を標準的な写像とする。このとき、

$$\forall^s x \in X \left[f(x) = g(x) \right] \Rightarrow f = g$$

が成り立つ。

証明. f, g のグラフをおおの $F, G \subseteq X \times Y$ とする。どの $x \in X, y \in Y$ についても

$$\langle x, y \rangle \in F \Leftrightarrow y = f(x),$$

$$\langle x, y \rangle \in G \Leftrightarrow y = g(x).$$

標準的な x については $f(x) = g(x)$ であることより、 $x \in X$ が標準的ならば、

$$\langle x, y \rangle \in F \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G$$

が任意の y について成り立つ。よって、

$$\forall^s x \forall y \left[\langle x, y \rangle \in F \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G \right]$$

が成立する。これより転移公理によって

$$\forall x \forall y \left[\langle x, y \rangle \in F \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G \right]$$

が得られる。従って、 $F = G$ となる。 ■

7 実数

超準数学は実数についての重宝な言葉を提供する：無限小実数、2 実数が無限に近い、実数の標準部分等。これらの述語は非古典的なので慎重に使わないと誤った結論を出しやすい。

1. 無限小実数. 実数 x が無限小であるとは

$$(*) \quad \forall^s r \in \mathbf{R} \left[r > 0 \Rightarrow |x| < r \right]$$

を満たすことをいう。この述語は

$$(**) \quad \forall^s \in \mathbf{N} \left[|x| < 1/n \right]$$

と同値である。 $(*)$ が $(**)$ を導くことは明らかであるが、逆は Archimedes の公理

$$\forall r \in \mathbf{R} \left[r > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbf{N} \left[nr > 1 \right] \right]$$

を用いる。

命題. 標準的な無限小実数は 0 である。

証明. x を標準的な無限小実数とする。無限小の定義より

$$\forall^s r \in \mathbf{R} \left[r > 0 \Rightarrow |x| < r \right]$$

であるが、 x が標準的なので、転移公理を適用できて

$$\forall r \in \mathbf{R} \left[r > 0 \Rightarrow |x| < r \right]$$

となる。もしも $x \neq 0$ ならば $|x|/2 > 0$ であるから $|x| < |x|/2$ を得るので矛盾。よって $x = 0$ となる。 ■

2. 無限に近い. 実数 x, y の差が無限小であるとき, x, y は無限に近いといい、 $x \simeq y$ と書く。直接定義を書けば

$$(b) \quad x \simeq y \stackrel{def}{\iff} \forall^s r \in \mathbf{R} \left[r > 0 \Rightarrow |x - y| < r \right]$$

である。上の命題より次がわかる。

命題. 2 つの標準的な実数が無限に近ければ等しい。

3. 有界. 実数 x の絶対値がある標準的な実数よりも小さいとき、すなわち

$$\exists^s r \in \mathbf{R} \left[|x| < r \right]$$

であるとき、 x は有界であるという。どの実数よりも大きな自然数が存在するので、この条件は

$$\exists^s n \in \mathbf{N} \left[|x| < n \right]$$

と同値である。

注意. 自然数については、標準的であることと有界であることが同値な条件となる。標準的ならば有界であることは明らかであるが、その逆は m が有界であること

$$\exists^s n \in \mathbf{N} \left[m < n \right]$$

と、 m が非標準的であること

$$\forall^s n \in \mathbf{N} \left[n < m \right]$$

とは、明らかに両立しないことからわかる。

実数については、標準的ならば有界であるが、その逆は成り立たない。すなわち、有界であっても標準的であるとは限らない。実際、標準的な数に無限小の数を加えても有界である。しかし、次のことを示すことができる。証明は自明ではない。

4. 定理 (有界実数の標準成分). どの有界な実数も、ただ一つの標準的な実数と無限に近い。

証明. a を有界な実数とする。 a と無限に近い標準的な数は高々一つしかないことは上の命題より明らかである。そこで、そのような標準的な実数の存在を示そう。

$$X := {}^S\{x \mid a < x\}$$

とみると、これは空ではない標準的な集合で、下に有界である。そこで

$$x := \inf X$$

が定義されるが、これが標準的で $x \simeq a$ となる。以下これを示そう。

標準的であることは、 $\inf$ という写像は、下に有界な実数の集合の集合から実数への標準的な写像であるから、 X が標準的なので x も標準的となる。

任意の標準的な正実数 ϵ について $|x - a| < \epsilon$ であることを示す。

まず、 $a - x \geq \epsilon$ と仮定してみよう。すると、任意の X の標準的な元 y について

$$y > a > a - \epsilon/2 \geq x + \epsilon/2$$

が成り立つ。従って、

$$\forall^s y \in X \left[y > x + \epsilon/2 \right]$$

より、 $(x + \epsilon/2)$ が標準的であることにより) 転移公理から

$$\forall y \in X \left[y > x + \epsilon/2 \right]$$

を得るが、これは x が X の下限であることに矛盾する。よって

$$a - x < \epsilon$$

が示された。

次に $x - a \geq \epsilon$ と仮定して見よう。このとき

$$a < a + \epsilon/2 \leq (x - \epsilon) + \epsilon/2 = x - \epsilon/2.$$

従って、標準的な数 $x - \epsilon/2$ は X の元となる。するとそれは下限 x よりも大きくなければならないがそれは不可能である。よって、

$$x - a < \epsilon$$

が示された。

以上を併せて、任意の標準的な正実数 ϵ について $|x - a| < \epsilon$ が示されたので $x \simeq a$ となる。 ■

有界な実数 a に対して $a \simeq x$ を満たすただ一つの標準的な実数 x を $\text{st}(x)$ と書く。

5. $\text{st}(x)$ の自明な性質. $x, y, \dots$ は有界な実数とする。

- (a) $x \simeq \text{st}(x)$.
- (b) $x \simeq y \Leftrightarrow \text{st}(x) = \text{st}(y)$.
- (c) x が標準的ならば $x = \text{st}(x)$.
- (d) $x \leq y$ ならば $\text{st}(x) \leq \text{st}(y)$.

注意. $x < y$ ならば $\text{st}(x) \leq \text{st}(y)$ であるが $\text{st}(x) < \text{st}(y)$ とは限らない。

6. $\text{st}(x)$ の性質. $x, y, \dots$ は有界な実数とする。

- (a) $\text{st}(x + y) = \text{st}(x) + \text{st}(y)$.
- (b) $\text{st}(xy) = \text{st}(x) \text{st}(y)$.

$$(c) \ x \neq 0 \Rightarrow \text{st}(y/x) = \text{st}(y) / \text{st}(x).$$

7. $\text{st}(x), \simeq$ の自明な性質 (続).

$$(e) \ St(x) = 0 \Leftrightarrow x \simeq 0 \Leftrightarrow x \text{ は無限小.}$$

$$(f) \ |x - y| < \epsilon \text{ がある無限小正実数 } \epsilon \text{ について成り立てば } x \simeq y.$$

$$(g) \ x \simeq y \wedge x' \simeq y' \Rightarrow x + x' \simeq y + y'.$$

$$(h) \ \text{無限小の実数と有界実数の積は無限小.}$$

$$(i) \ x \simeq y \wedge x' \simeq y' \Rightarrow xx' \simeq yy'.$$

証明.

$$|xy - x'y'| \leq |x - x'|y + x'|y - y'|$$

であるが、 x', y はともに有界であるので、右辺は無限小である。したがって $xy \simeq x'y'$ となる。 ■

8. $\text{st}(x)$ の性質. $x, y, \dots$ は有界な実数とする。

$$(a) \ \text{st}(x + y) = \text{st}(x) + \text{st}(y).$$

証明. $x \simeq \text{st}(x), y \simeq \text{st}(y)$ より $x + y \simeq \text{st}(x) + \text{st}(y)$. $\text{st}(x) + \text{st}(y)$ は標準的なので $\text{st}(x + y) = \text{st}(x) + \text{st}(y)$ となる。 ■

$$(b) \ \text{st}(xy) = \text{st}(x) \text{st}(y).$$

証明. $xy \simeq \text{st}(x) \text{st}(y)$ かつ $\text{st}(x) \text{st}(y)$ は標準的であるから。 ■

$$(c) \ x \neq 0 \Rightarrow \text{st}(y/x) = \text{st}(y) / \text{st}(x).$$

証明. $y = (y/x)x$ に上を適用すれば $\text{st}(y) = \text{st}(y/x) \text{st}(x)$. ■

$$(d) \ n \text{ が標準的な数であるとき } \text{st}(\prod_i^n x_i) = \prod_i^n \text{st}(x_i).$$

証明. 非標準的帰納法を用いる。 $n = 1$ ならばあきらか。 $n < k$ で成立するとすれば

$$\text{st}\left(\prod_i^k x_i\right) = \text{st}\left(x_k \prod_i^{k-1} x_i\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{st}(x_k) \text{st} \left(\prod_i^{k-1} x_i \right) \\
&= \text{st}(x_k) \prod_i^{k-1} \text{st}(x_i) \\
&= \text{st} \left(\prod_i^k x_i \right)
\end{aligned}$$

より $n = k$ でも成立する。よって、任意の標準的な自然数について主張は成立する。 ■

非標準的帰納法.

P を自然数についての任意の性質とする。このとき

- $P(0)$ が真。
- 標準的自然数 n について $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ が成り立つ。

かなりたてば、 $P(n)$ は任意の標準的な自然数 n に対して成立する。

証明. $X := {}^S\{n \mid P(n)\}$ とおく。仮定より、 $0 \in X$, かつ

$$\forall^s n \in \mathbf{N} \left[n \in X \Rightarrow n+1 \in X \right].$$

ところが、 X は標準的なので、転移公理より

$$\forall n \in \mathbf{N} \left[n \in X \Rightarrow n+1 \in X \right]$$

が成立する。従って、帰納法より $X = \mathbf{N}$ となる。これより、すべての標準的な自然数 n は X に属すること、すなわち、 P を満たすことがわかる。 ■

-
7. 命題 (標準有限和に関する $\simeq$ の不変性) n を標準的な自然数とし、 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ を実数列とすると、

$$\forall i \left[a_i \simeq b_i \right] \Rightarrow \sum_i^n a_i \simeq \sum_i^n b_i.$$

証明. $\epsilon = \max \{ |a_i - b_i| \mid i = 1, \dots, n \}$ とおくと、これは無限小となる (なぜか?)。したがって $|a_i - b_i| < \epsilon$ が任意の i について成立するので

$$\begin{aligned} \left| \sum_i^n a_i - \sum_i^n b_i \right| &< \sum_i^n |a_i - b_i| \\ &< n\epsilon \end{aligned}$$

n が標準的な自然数なので、 $n\epsilon$ も無限小となる (なぜか?)。したがって $\sum_i^n a_i \simeq \sum_i^n b_i$. ■

8. 命題 (無限に近い数の比). a, b を有界な数で無限小ではないとする。ことのき、

$$a \simeq b \Leftrightarrow a/b \simeq 1.$$

証明. $St(a/b) = St(a)/St(b)$ より、 $St(a/b) = 1 \Leftrightarrow St(a) = St(b)$, すなわち、 $a/b \simeq 1 \Leftrightarrow a \simeq b$. ■

9. 命題 (標準有限積に関する $\simeq$ の不変性) n を標準的な自然数とし、 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ を有界な実数列とすると、

$$\forall i \left[a_i \simeq b_i \right] \Rightarrow \prod_i^n a_i \simeq \prod_i^n b_i.$$

証明. 仮定より

$$\forall i \left[st(a_i) = st(b_i) \right].$$

であるから、

$$\begin{aligned} st \left(\prod_i^n a_i \right) &= \prod_i^n st(a_i) \\ &= \prod_i^n st(b_i) \\ &= st \left(\prod_i^n b_i \right) \end{aligned}$$
■

10. 実関数の定める標準実関数.

- (a) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を写像で、 a が有界ならば $f(a)$ も有界であるものとする。このとき標準的な写像

$${}^S f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

で

$$\forall^s x \in \mathbf{R} \quad \left[{}^S f(x) \right] = \text{st}(f(x))$$

を満たすものがただ一つ存在する。

- (b) 例. ϵ を無限小の正数とする。写像 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を関係

$$f(x) = [x/\epsilon]\epsilon$$

により定める。ただし、 $[a]$ は実数 a の整数部分を表わす。このとき、この写像が定める標準的な写像 ${}^S f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は恒等写像となる。

証明. 任意の標準的な実数 x について

$$[x/\epsilon] \leq x/\epsilon \leq [x/\epsilon] + 1$$

より

$$f(x) \leq x \leq f(x) + \epsilon.$$

したがって、 $x \simeq f(x)$. ■

補足 実数と自然数の比較

	無限小である	有界だが無限小でない	有界ではない
実数 or 有理数	非標準的	標準的または非標準的	非標準的
整数	なし	標準的	非標準的

すなわち、自然数については、標準的と有界とは同義語となる。

8 実数列とその極限

以下次の記号を用いる。

$$\forall^n x \left[P(x) \right] \stackrel{def}{\iff} \forall x \left[x \text{ が非標準的ならば } P(x) \right]$$

$$\exists^n x \left[P(x) \right] \stackrel{def}{\iff} \exists x \left[x \text{ は非標準的で } P(x) \text{ を満たす} \right]$$

8.1 定義. 自然数から実数への写像 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ を実数列という。これを $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ ($a_i := f(i)$) のように書く。

8.2 定理 標準的な実数列 $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ が a に収束するための必要かつ十分な条件は, a が標準的な実数であって、

$$a_\omega \simeq a$$

が任意の非標準的な自然数 ω について成り立つことである。

証明. まず、 $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ とする。 $\lim$ は (収束実数列の集合から実数への) 標準的な写像なので a は標準的である。 ω を非標準的な自然数とし、 ϵ を任意の正実数とする。このとき、

$$\exists m \in \mathbf{N} \forall n \geq m \left[|a_n - a| < \epsilon \right]$$

が成り立つ。転移公理を使うと (使えるか?)

$$\exists^s m \in \mathbf{N} \forall n \geq m \left[|a_n - a| < \epsilon \right]$$

が成り立つ。そこで

$$\forall n \geq m \left[|a_n - a| < \epsilon \right]$$

が成り立つ標準的な m を一つとる。すると、どの非標準的な自然数 ω も $\omega > m$ を満たすので $|a_\omega - a| < \epsilon$ が成り立つ。以上により

$$\forall^s \epsilon > 0 \left[|a_\omega - a| < \epsilon \right]$$

すなわち $a_\omega \simeq a$ が示された。逆に

$$\forall^n \omega \in \mathbf{N} \left[a_\omega \simeq a \right]$$

となる標準的な a があると仮定する。 ϵ を標準的な正実数とする。すると集合

$$\left\{ \mid \forall \ell \geq n \left[|a_\ell - a| < \epsilon \right] \right\}$$

はすべての非標準的な自然数を含むので、ある標準的な自然数 m を含む。従って

$$\exists^s m \forall \ell \geq m \left[|a_\ell - a| < \epsilon \right]$$

が示せたので、 ϵ, a が標準的であることにより転移公理より

$$\exists m \forall \ell \geq m \left[|a_\ell - a| < \epsilon \right]$$

を得る。従って

$$\forall \epsilon > 0 \exists m \forall \ell \geq m \left[|a_\ell - a| < \epsilon \right]$$

となり、再び転移公理より、

$$\forall \epsilon > 0 \exists m \forall \ell \geq m \left[|a_\ell - a| < \epsilon \right],$$

すなわち $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ 導かれる。 ■

[8.3] 注意. 数列が標準的でない場合は上の同値は成り立たない。例えば

[8.3.1] $a_n = 1 \quad (n \leq \omega), \quad 0 \quad (n > \omega)$ とすると $\lim_n a_n = 0$ であるが $a_\omega = 1$.

[8.3.2] $a_n = \epsilon$ ($\epsilon > 0$ は無限小実数) とすれば、 $\lim_n a_n = \epsilon$ であるが、 $a_n \simeq 0$ がすべての n について成立。

[8.4] 命題. 数列 $(a_i), (b_i)$ が a, b に収束するならば、 $(a_i + b_i), (a_i b_i)$ も収束し

$$\lim(a_i + b_i) = \lim a_i + \lim b_i, \quad \lim(a_i b_i) = \lim a_i \lim b_i$$

となる。さらに $\forall i \left[b_i \neq 0 \right]$ かつ $\lim b_i \neq 0$ ならば (a_i/b_i) も収束しその極限は a/b となる。

証明. 定理の主張は古典的な命題でパラメータはないので $(a_i), (b_i)$ が標準的である場合に証明すれば、転移公理より一般の場合も証明される。

そこで、 $(a_i), (b_i)$ は標準的で a, b におのの収束するとする。このとき任意の非標準的な自然数 ω について $a_\omega \simeq a, b_\omega \simeq b$ である。これより、

$$a_\omega + b_\omega \simeq a + b$$

$$a_\omega b_\omega \simeq ab$$

$$a_\omega/b_\omega \simeq a/b$$

を得る。従って 定理の結論がこれらの数列について成り立つ。 ■

8.5 定理：コーシーの収束判定条件. 標準的な実数列 (a_i) が収束するための必要かつ十分な条件は任意の非標準的な自然数 ω, η について $a_\omega \simeq a_\eta$ であること、すなわち

$$\forall^n \omega \forall^n \eta \left[a_\omega \simeq a_\eta \right]$$

が成り立つことである。

証明. 収束しているときは、どの非標準的な自然数 ω についても $a_\omega \simeq a$ であるから、どの標準的な自然数 ω, η についても、あきらかに $a_\omega \simeq a_\eta$.

逆にどの非標準的な自然数 ω, η についても $a_\omega \simeq a_\eta$ ならば、ある非標準的な ω を任意にとり $a := \text{st}(a_\omega)$ とおけば、どの非標準的な η についても $a_\eta \simeq a$ となるので $\lim_n a_n = a$ となる。■

8.6 命題. 有界単調非減少数列は収束する。

証明. 主張は古典的なので、標準的な有界単調非減少数列が収束することを示せばよい。 (a_n) を標準的な有界単調非減少数列とする。このとき $\{ M \mid \forall n \left[|a_n| \leq M \right] \}$ は空でない標準的な集合なので、標準的な元 M を含む。従って、非標準的な ω について a_ω は「有界」であることがわかる。従ってその標準的な部分を考えることができる。非標準的な $\omega < \eta$ について $\text{st}(a_\omega) = \text{st}(a_\eta)$ を示す。 $\text{st}(a_\omega) \neq \text{st}(a_\eta)$ とすると単調性より

$$(*) \quad \text{st}(a_\omega) < \text{st}(a_\eta)$$

である。一方、標準的な m については単調性より

$$a_m = \text{st}(a_m) \leq \text{st}(a_\omega)$$

なので、転移公理により $\forall m \left[a_m \leq \text{st}(a_\omega) \right]$ となる。これより $a_\eta \leq \text{st}(a_\omega)$ となり $(*)$ に矛盾。■

8.7 Robinson の補題.

$$[8.7.1] \quad \forall^s m \left[a_m = 0 \right] \Rightarrow \exists^n \omega \forall m \leq \omega \left[a_m = 0 \right].$$

$$[8.7.2] \quad \forall^n m \left[a_m \simeq 0 \right] \Rightarrow \exists^n \omega \forall m \leq \omega \left[a_m \simeq 0 \right].$$

証明. 最初の主張は標準的な自然数の集合がないことから明らか。後の主張は $a_n \simeq 0$ という述語が古典的でないために $\{ n \mid a_n \simeq 0 \}$ という集合を作れないので、工夫がいる。

$$\left\{ m \mid \forall n \leq m \left[|a_n| < \frac{1}{m} \right] \right\}$$

とくと、これはすべての標準的な自然数を含むので、非標準的な自然数 ω も含む。すると

$$\forall n \leq \omega \left[|a_n| < \frac{1}{\omega} \right].$$

$\frac{1}{\omega} \simeq 0$ より結論を得る。 ■

9 連続性

9.1 S -連続性

[9.1.1] 定義 写像 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ が $x \in \mathbf{R}$ において S -連続であるとは、

$$\forall y \in \mathbf{R} \left[y \simeq x \Rightarrow f(y) \simeq f(x) \right]$$

が成り立つことをいう。

[9.1.2] S -連続性と連続性の違いのある例.

[9.1.2(1)] 連続ではあるが S -連続でない例. $x \mapsto (x + 1/x)^2$ は $x \neq 0$ で連続である。しかし、 x が有界でないとき、 x では S -連続ではない。

[9.1.2(2)] S -連続ではあるが連続でない例. $f_\epsilon(x) = \epsilon \cdot \text{sgn}(x)$ とおく、ただし sgn は符号関数

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

$\epsilon \neq 0$ ならば f_ϵ は原点で連続ではない。しかし、 ϵ が無限小正実数ならばこの関数はいたるところ S -連続である。

[9.1.3] 定理 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ と $x \in \mathbf{R}$ がともに標準的ならば

f が x において連続 $\iff f$ が x において S -連続.

■

[9.1.4] 定理. $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ が標準的であるとき、

$$f \text{ は } I \text{ 上で連続} \iff \forall^s x \in I \left[f \text{ は } x \text{ 上で } S\text{-連続} \right]$$

証明. f が標準的なので、上の定理より

$$\{ x \in I \mid f \text{ は } x \text{ で連続} \} = {}^S \{ x \in I \mid f \text{ は } x \text{ で } S\text{-連続} \}$$

より。

■

標準的な関数については、標準的な点での S -連続性さえわかれば、至るところで連続となるのである。このことは、標準的でない点では、 S -連続とは限らないことを考えると、意外性がある。

[9.1.5] 注意 S -連続性は次の意味で連続性を 間接的に定義する. I を標準的な区間, $\mathcal{F} := \{ f \mid f : I \rightarrow \mathbf{R} \}$ を I 上の実数値関数の成す標準的な集合とする. このとき

$$^S\{ (f, x) \in \mathcal{F} \times I \mid f \text{ は } x \text{ で } S\text{-連続} \} = \{ (f, x) \in \mathcal{F} \times I \mid f \text{ は } x \text{ で連続} \}.$$

である. f, x のいずれかが標準的でない場合については S -連続性と連続性の関係は自明ではない. しかし、たとえば次は示せる:

[9.1.6] 定理. I は標準的な区間、 $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ を S -連続な関数とし、標準的な $x \in I$ については $g(x)$ は有界であるとする. このとき [8.10.1] で定義した Sg は連続である. ■

[9.1.7] 例. $g(x) := \epsilon f([x/\epsilon])$ とおくと、 $^Sg = f$.

9.2 連続関数についての標準的定理の例. 以下の定理の主張は古典的であることに注意せよ. 証明は非標準的な議論を使う.

[9.2.1] 中間値の定理. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ が連続で $f(0) < 0 < f(1)$ ならば $f(x) = 0$ となる $x \in [0, 1]$ が存在する.

証明. $F \subseteq [0, 1]$ を標準的な元をすべて含む有限集合とする. x を $\{ y \in F \mid f(y) > 0 \}$ の最小元とすると $f(\text{st}(x)) = 0$ となる. ■

[9.2.2] コンパクト集合上の連続関数の最大値の存在定理. I をコンパクトな区間とし、 $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ を連続関数とする. このとき f は I 上で最大値を取る.

証明. I, f は標準的であるとして証明すればよい. $F \subseteq [0, 1]$ を標準的な元をすべて含む有限集合とする. $a \in F$ において $f|_F$ が最大値を取るとする. I はコンパクトで標準的なので次の補題より a は有界で $\text{st}(a) \in I$. このとき f は $\text{st}(a)$ において最大値をとることがわかる. 実際

$$\forall^s x \in I \quad [f(x) \leq f(a)] .$$

ところが、 $x \in I$ が標準的ならば $f(x) \leq f(a) \simeq f(\text{st}(a))$ より $f(x) \leq f(\text{st}(a))$. 従って

$$\forall^s x \in I \quad [f(x) \leq f(a)] .$$

転移公理より

$$\forall x \in I \quad [f(x) \leq f(a)]$$

を得る。 ■

[9.2.3] 補題 (コンパクト性の特徴付け) 標準的な集合 $I \subseteq \mathbf{R}$ がコンパクトであるための必要かつ十分な条件は

- I の元はすべて有界,
 - I の元の標準的な部分は再び I の元.
-

注意. 一般に標準的な $X \subseteq \mathbf{R}$ に対して

$$\overline{X} = X^*,$$

ただし、 $X^* \subseteq \mathbf{R}$ は X の影(shade)と呼ばれるもので

$$X^* := {}^S\{x \in \mathbf{R} \mid \forall^s \epsilon > 0 \exists y \in X \left[|x - y| < \epsilon \right] \}$$

により定義される. X が標準的な場合は

$$X^* = {}^S\{x \in \mathbf{R} \mid \exists y \in X \left[x \simeq y \right] \}$$

となる。

9.3 S -一様連続性

[9.3.1] 定義. $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ が S -一様連続であるとは

$$\forall x, y \in I \left[x \simeq y \rightarrow f(x) \simeq f(y) \right].$$

これは、 $\forall x \in I \left[f \text{ は } x \text{ で } S\text{-連続} \right]$ というようにも表現できる。

[9.3.2] 定理. f が標準的であるとき、

$$f \text{ は一様連続} \iff f \text{ は } S\text{-一様連続}.$$

■

[9.3.3] 定理 (コンパクト集合上での連続関数の一様連続性). I がコンパクトな区間であるとき、 I 上で連続な関数は I 上で一様連続である。

証明. 次の補題より任意の $x, y \in I$ は有界で

$$x \simeq \text{st}(x), \quad y \simeq \text{st}(y).$$

従って、 $x \simeq y$ ならば $\text{st}(x) = \text{st}(y)$ で

$$f(x) \simeq f(\text{st}(x)) = f(\text{st}(y)) \simeq f(y).$$

■

補足.

- 1 定理 [10.1.6](Continuous shade) の証明. $f = {}^S g$ とおく. f が標準的な点 x で連続なことをいえばよい. $\epsilon > 0$ を標準的とする. y も標準的なならば

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |f(y) - g(y)| \simeq |g(x) - g(y)|$$

であるから、標準的な $\epsilon > 0$ に対して

$$\exists^s \eta > 0 \left[|x - y| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \epsilon \right]$$

を示せばよい. しかし、このことは S-連続性により

$$\{ \eta > 0 \mid |x - y| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \epsilon \}$$

が任意の無限小正実数を含むことからいつもの議論からわかる。

- 2 コンパクト性について [10.2.3] $I \subseteq \mathbf{R}$ のコンパクト性を 2 つの条件で述べたが、これは次のように一言で表現する方が明快である (これを S-コンパクト性と呼ぶ). I のすべての要素は I の標準的な要素に無限に近い、すなわち

$$\forall x \in I \exists^s y \in I \left[x \simeq y \right].$$

さて、この証明は次の通り。

証明. まず、 I をコンパクトかつ標準的とし、 $x \in I$ とする. I は有界な集合なので、

$$\exists R \quad \forall x \in I \left[|x| < R \right]$$

であるが、転移公理より

$$\exists^s R \quad \forall x \in I \left[|x| < R \right]$$

となる. したがって x は有界となり、 $x \simeq \text{st}(x)$. いま、 $\text{st}(x) \in I$ ではないとすると、 I は閉集合なので、

$$\forall z \in I \left[|z - \text{st}(x)| > \epsilon \right]$$

となる正数 ϵ が存在するが、転移公理より、この ϵ は標準的なものとしてとれる。これは $x \simeq \text{st}(x)$ と矛盾する。よって $\text{st}(x) \in I$ でなければならない。

逆に I は S-コンパクトであるとする。もしも I が有界でないとすると、 $|x_n| > n$ となるような数列 $(x_n) \subseteq I$ が存在する。このとき標準的でない ω について x_ω 有界でなくなり、S-コンパクト性に矛盾する。

また、 I が閉集合でないとすると。このとき、 I の標準的数列 (x_n) で $x \notin I$ に収束するものがとれる（転移公理を使っていることに注意！）。すると、標準的でない ω について $\text{st}(x_\omega) \notin I$ となり、再び S-コンパクト性と矛盾。

■

3 shadow について. $X \subseteq \mathbf{R}$ について

$$X^* := {}^S\{x \in \mathbf{R} \mid \exists y \in X \ [y \simeq x]\}$$

と定義するとき、 X が標準的なならば、

$$X^* = \overline{X}$$

となることは次のようにして証明できる：

証明. x を標準的な実数とする。

$x \in \overline{X}$ とする。このとき $\lim x_n = x$ となる I の点列がとれる。すると標準的でない ω について $x \simeq x_\omega \in I$ となる。

$x \in X^*$ とする。このとき、 $x \simeq y \in I$ となる y がある。従って

$$\forall^s \epsilon > 0 \exists y \in I \ [|x - y| < \epsilon]$$

である。転移公理より

$$\forall \epsilon > 0 \exists y \in I \ [|x - y| < \epsilon],$$

すなわち、 $x \in \overline{X}$.

■

10 微分可能性

10.1 定義 I を区間とし、写像 $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ が $a \in I^\circ$ において S -微分可能であるとは、

$$\exists^s m \left[x \simeq a \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \simeq m \right].$$

ただし、 I° は I の内点を表わす。

10.2 定理 $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ と $x \in \mathbf{R}$ がともに標準的ならば

f が x において微分可能 $\iff f$ が x において S -微分可能.

■

10.3 定理. $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ が標準的で x で微分可能であるとき、

$$\forall^s \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \left[0 < |x - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right| < \varepsilon \right].$$

証明. 略証. 微分可能な点の全体は標準的な集合 J となる。標準的な $x \in J$ と標準的な正数 ϵ について

$$\forall y \left[0 < |x - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right| < \epsilon \right]$$

は無限小の δ についてはいつも成立するので、

$$\exists \delta > 0 \forall y \left[0 < |x - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right| < \epsilon \right].$$

従って、

$$\forall x \in J \exists \delta > 0 \forall y \left[0 < |x - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right| < \epsilon \right].$$

■

10.4 強微分可能性. 標準的な $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ が標準的な $a \in I^\circ$ で強微分可能であるとは、

$$\forall x \in I \forall y \in I \left[x \simeq a \wedge y \simeq a \wedge x \neq y \Rightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \simeq f'(x) \right].$$

標準化公理より、任意の f, a についても、 f が a で強微分可能である、という概念が間接的に定義される。

10.5 定理. 標準的な f が I 連続的に微分可能であることと I で強微分可能であることは同値である。

証明. f が連続的に微分可能であるとする。 $a \in I$ を標準的とする。 $x \simeq y \simeq a$ で $x < y$ とする。 Rolle の定理より $x < z < y$ で

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \simeq f'(z)$$

となるものがある。 $z \simeq a$ より $f'(z) \simeq f'(a)$ 。

逆に、 f が I で強微分可能とする。 f' は標準的なので f' が標準的な $a \in I$ で S-連続であることを示せばよい。 $x \simeq a$ とする。 x でも微分可能なので、定理より

$$\forall y \left[0 < |x - y| < \delta \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \simeq f'(x) \right]$$

となる無限小 $\delta > 0$ がある。 $y = x + \delta/2$ とおくと一方 $x \simeq y \simeq a$ となるので強微分可能性より、

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \simeq f'(a).$$

以上より $f'(x) \simeq f'(a)$ を得る。 ■

10.6 Taylor 展開. f, a, n が標準的なとき

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x - a)^n}{n!} \\ & + \epsilon_{n,a}(x)(x - a)^{n+1} \end{aligned}$$

ただし、

$$x \simeq a \Rightarrow \epsilon_{n,a}(x) \simeq 0.$$
■

10.7 Roll の定理は、区間 $[a, b]$ 上実関数が、内点で微分可能で $f(a) = f(b)$ を満たすとき $f'(c) = 0$ を満たす $a < c < b$ が存在することを主張するものであった。この証明は、転移公理により、 a, b, f が標準的な場合に示せばよい。今、 $[a, b]$ はコンパクトなので定数でない限

り、内点 c で最大値または最小値をとる。このとき、 c は標準的であるとしてよい。すると f は c で S -微分可能であるから、

$$\frac{f(c) - f(d)}{c - d} \simeq m \quad \forall d \simeq c$$

である。従って

$$f(d) = f(c) + (m + r)(d - c)$$

で $d \simeq c$ とすると、 $r \simeq 0$ であるから、 $m > 0$ ならば $m + r > 0$. 従って、 $f(d)$ は $f(c)$ よりも大きくも小さくもなるので矛盾。

10.8 これを、

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) - f(a) & f(b) - f(a) \\ x - a & b - a \end{vmatrix}$$

に適用すると、 $a < c < b$ で

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たすものがあることがわかる (この証明は非標準的なことは使っていない。)

10.9 系. 区間 $[a, b]$ の内点で微分可能な関数 $f'(x)$ が、内点の至る所で $f' = 0$ を満たすとき f は定数であることがわかる。

11 積分

11.1 定義 無限小正実数 $\epsilon > 0$ を一つ選ぶ。 $I = [a, b]$ と有界な写像 $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ の組 (a, b, f) から $\mathbf{R}$ への写像

$$\Theta : (a, b, f) \mapsto \int_a^b f(x) dx$$

を a, b, f が標準的な場合に

$$\int_a^b f(x) dx = \text{st} \left(\epsilon \sum_{a \leq j\epsilon < b} f(j\epsilon) \right)$$

となるように定義する（写像の間接的定義！右辺が定義されることを確認しなければならない）。

11.2 基本的な性質.

[11.2.1] 区間についての加法性

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

[11.2.2] 基本的評価.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \sup |f|.$$

[11.2.3] $\forall x \left[f(x) \simeq 0 \right]$ ならば

$$\int_a^b f(x) dx \simeq 0.$$

[11.2.4] $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ は連続である。

[11.2.5] f が標準的で連続ならば、 $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ は各標準点 x で強微分可能となり、微分係数は $f(x)$ となる。すなわち F は f の原始関数となる。

[11.2.6] f が連続的に微分可能であるとき、

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

11.3 定理 連続な f に対しては $\int_a^b f(x)dx$ は無限小数 ϵ のとり方によらずに決まる。

証明. 概要 2つの無限小実数 ϵ_i ($i = 1, 2$) から定義される積分についての写像

$$F_i : x \mapsto \int_{ia}^x f(x)dx \quad (i = 1, 2)$$

は連続で $F_i(a) = 0$ かつその導関数はいずれも $f(x)$ である。従って $F_1 = F_2$ でなければならない。■

11.4 定理. 標準的な写像 $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ と、連続的に微分可能な写像 $p : I \rightarrow \mathbf{R}$ が存在して、

$$\forall x \in I \left[f(x) \simeq p(x) \right]$$

$$\forall x \in I \left[g(x) \simeq p'(x) \right]$$

を満たすならば、 f は連続的に微分可能でありその微分は g となる。

証明.

$$f(x) - f(a) \simeq p(x) - p(a) = \int_a^x p'(x)dx \simeq \int_a^x g(x)dx.$$

■

11.5 例.

[11.5.1]

$$e^x = \text{st} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

より

$$\frac{de^x}{dx} = \text{st} \left(\left(1 + \frac{x}{n} \right)^{n-1} \right) = e^x.$$

12 常微分方程式

12.1 $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ を連続関数とする。微分方程式

$$u' = f(x, u)$$

の解とは、連続的に微分可能な関数 $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ で

$$u'(x) = f(x, u(x)) \quad \forall x \in [a, b]$$

が成り立つものをいう。

12.2 ペアノの定理. 連続関数 $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ が

$$\forall x \in [a, b] \left[|f(x)| \leq M := \frac{d - c}{2(b - a)} \right]$$

を満たすとき、

$$u(a) = \frac{c + d}{2}$$

を満たす解 u が存在する。

証明. f, a, b, c, d は標準的であるとしてよい。

$[a, b] = [0, A]$, $[c, d] = [-B, B]$ としても一般性を失わない。このとき仮定は、

$$\forall x \in [0, A] \left[|f(x)| \leq B/A \right].$$

無限小実数 ϵ を一つ固定し、

$$V(0) = 0, \quad V(n+1) = V(n) + f(n\epsilon, V(n))\epsilon$$

により $V : \{n \mid n\epsilon \leq A\} \rightarrow \mathbf{R}$ を定義し、これを用いて写像 $v : [0, A] \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$v(x) := V\left(\left[\frac{x}{\epsilon}\right]\right)$$

により定義する。

$$\bullet \quad |v(x)| \leq AB \quad \forall x \in [0, A].$$

が示されるので、 $v(x)$ は有界となる。従って、

$$u(x) = v(x)*$$

により、標準的な写像 $u : [0, A] \rightarrow [-B, B]$ が定義される。

- v は S -連続である。

証明. $x < x'$ のとき

$$v(x') - v(x) = \sum_{x \leq n\epsilon < x'} f(n\epsilon, v(n\epsilon))\epsilon$$

であるから。 ■

Continuous shade theorem より

- u は連続。

さて、 $x < x'$ が標準的なとき、

$$|u(x) - u(x')| \leq \text{st}(|v(x) - v(x')| \leq B|x' - x|).$$

転移公理よりすべての x, x' に対して

$$|u(x) - u(x')| \leq B|x' - x|.$$

従って、 $x = \text{st}(n\epsilon), x' = n\epsilon$ のとき

$$u(n\epsilon) \simeq u(x) = \text{st}(v(x)) \simeq v(x) \simeq v(n\epsilon).$$

よって、 f の一様連続性より

$$f(n\epsilon, u(n\epsilon)) \simeq f(n\epsilon, v(n\epsilon)).$$

これより

$$\begin{aligned} u(x) &\simeq v(x) \\ &= \sum_{0 \leq n\epsilon < x} f(n\epsilon, v(n\epsilon))\epsilon \\ &\simeq \sum_{0 \leq n\epsilon < x} f(n\epsilon, u(n\epsilon))\epsilon. \end{aligned}$$

両辺の標準的な部分をとれば

$$u(x) = \text{st} \left(\sum_{0 \leq n\epsilon < x} f(n\epsilon, u(n\epsilon))\epsilon \right) = \int_0^x f(t, u(t))dt.$$

従って u は連続的に微分可能で

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

となる。すなわち、 u は解となる。 ■

13 チューリング機械

13.1 定義. 次のような3つ組 $TM = (\Sigma, Q, \delta)$ をチューリング機械という。

- Σ は有限集合で、その元はテープ記号と呼ばれる。空白記号 B と区切り記号 $\#$ を含む。
- Q は状態空間と呼ばれる有限集合で、その元はヘッダの状態と呼ばれる。初期状態 q_0 と停止状態 H とを含む。
- $\delta : \Sigma \times Q \rightarrow \Sigma \times Q \times \{L, R, 0\}$, は状態遷移規則と呼ばれる写像であり、次を満たす。

$$\delta(\sigma, H) = (\sigma, H, 0), \quad \sigma \in \Sigma.$$

13.2 チューリング機械の状態. チューリング機械の状態は、 $\Sigma \cup Q$ の無限列で

- 有限個を除いて B 、
- Q の元が1回だけ出てくる。

状態が $\cdots \sigma_{-1} q \sigma_0 \sigma_1 \cdots$ であるとき CPU は現在 q という状態にあり、現在見ている場所にかかれてある記号は σ_0 であり、その右には $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ と記号が書かれていて、左には $\cdots \sigma_{-2}, \sigma_{-1}$ と記号が並んでいる。

チューリング機械 $\mathcal{M}$ の状態の全体を $S(\mathcal{M})$ と書く。

13.3 チューリング機械の動作. チューリング機械の動作は、書換規則で表現できる：現在 $\cdots \tau q \sigma \cdots$ であるとき

- $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', 1)$ のとき $q\sigma \rightarrow \sigma'q'$,
- $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', -1)$ のとき $\tau q\sigma \rightarrow q'\tau\sigma'$,
- $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', 0)$ のとき $q\sigma \rightarrow q'\sigma'$.

チューリング機械 $\mathcal{M}$ の有限回の動作で、状態 ω が状態 η に遷移するとき

$$\omega \vdash_{\mathcal{M}} \eta$$

と書く。

初期状態 $q_0\omega$ から動作を始めて $H\eta$ に達した場合に

$$\mathcal{M}, q_0\omega \vdash \eta$$

ともかく。もしも H を含む状態には達しないときは $\mathcal{M}$ は テープ ω についてループするという。

- 13.4 チューリング計算可能性. 部分関数 $f: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ がチューリング計算可能であるとは、次のようなチューリング機械 $\mathcal{M}$ が存在することである：

$$f(n_1, \dots, n_m) = n \iff \mathcal{M}, 1^{n_1} \# 1^{n_2} \# \dots \# 1^{n_m} \vdash 1^n.$$

- 13.5 チューリング機械のグラフ表示. 次のようなラベル付有向グラフによりチューリング機械の構造を記述できる：

- Q の元は頂点を表わす。
- $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', D)$ のとき、 q から q' への向きのついた辺を書きラベル $\sigma/\sigma', D$ を記入する。

- 13.6 例.

[13.6.1] 加算. σ は現在読んでいるテープ記号とする。

- q_0 初期状態。もしも $\sigma = \#$ ならば $n = 0$ ということなので何もしないで終わる。 $\sigma = 1$ ならばそれを 2 に書き換えて右に移り、状態は q_1 となる。
- q_1 右に $\#$ が見つかるまで移動し、見つければ q_2 に遷移する。
- q_2 右に B が見つかるまで移動し、見つければそれを 1 に書き換えて、 q_3 に遷移し左に移動。
- q_3 左に $\#$ が見つかるまで移動し、見つければ q_4 に遷移し左に移動。
- q_4 $\sigma = 2$ ならば処理が終わったので、2 を 1 に戻す q_5 に遷移する。 $\sigma = 1$ ならば状態 q_6 に遷移。
- q_5 左に移動しながら 2 を 1 に書き換える。 B に達したら右に移って停止。
- q_6 左に 2 を見い出すまで移動し、右に戻って今までの操作を再開すべく 状態 q_0 に戻る。

この機械を初期状態を $q_0 1^n \# 1^m$ として動かすと $H 1^n \# 1^{n+m}$ となって停止する。

なお、上の表記ではテープ記号すべてについて動作を記述していないので、チューリング機械の構造は確定していない。しかし、 $(n, m) \mapsto (n, n + m)$ という演算を実現するという点では、上の図で表わされる動作を「含む」チューリング機械ならばなんでもよいのである。

13.7 チューリング機械の合成. いくつかのチューリング機械があり、テープ記号が共通している場合には、それらを合成して、新しいチューリング機械を作ることができる。

13.8 練習問題

[13.8.1] 掛け算をするチューリング機械を構成せよ。

[13.8.2] 割り算をするチューリング機械を構成せよ。

14 チューリング機械の非標準的な使い方.

標準的なチューリング機械を用いて実数の計算概念を定義する。 η を非標準的な自然数とし、 $\omega := \eta^2, \varepsilon := \eta^{-1}$ とおく。標準的な非負実数 x に対して

$$N(x) := \left\lceil \frac{x}{\varepsilon} \right\rceil < \eta^2 = \omega$$

とおくと

$$x \simeq N(x)\varepsilon.$$

14.1 計算可能性 部分写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ が計算可能であるとは、ある標準的なチューリング機械 $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \delta)$ が存在し、

$$q_0 1^{N(x_1)} \# 1^{N(x_2)} \# \cdots \# 1^{N(x_m)} \# 1^{\omega_1} \cdots \# 1^{\omega_k} \vdash_{\mathcal{M}} H 1^N,$$

であるときに限り $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ が定義され、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \simeq N\varepsilon$$

となることをいう。これは別の言い方をすれば、通常の意味でチューリング計算可能な標準的な部分写像 $F: \mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z}^m \rightarrow \mathbf{Z}$ が存在して、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \simeq F(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_m), \omega_1, \dots, \omega_m)\varepsilon$$

となることを意味する。

14.2 例.

[14.2.1] 和.

[14.2.2] 積. このときは η による「割り算」が必要となる。

$$xy \simeq N(x)N(y)\varepsilon^2 = (N(x)N(y)/\eta)\varepsilon.$$

[14.2.3] 計算可能関数の積分. $f(x) \simeq F(N(x))\varepsilon$ のとき

$$\int^x f(x)dx \simeq G(N(x))\varepsilon,$$

ただし、

$$G(n+1) = G(n) + F(n),$$

であり、 G は明らかに計算可能.

[14.2.4] 計算可能関数で与えられる常微分方程式の解写像: $f(y, t)$ を計算可能関数とすると, 常微分方程式

$$y(0) = a, \quad y'(t) = f(y(t), t)$$

の解は計算可能である。実際

$$f(x, t) \simeq F(N(x), N(t))\varepsilon$$

で、 F は計算可能とする。このとき 原始帰納法

$$X(0) = a, \quad X(n+1) = X(n) + F(X(n), n)$$

で定義される $X(n)$ によって解は

$$x(t) \simeq X(N(t))\varepsilon$$

と表わされる。

15 内的集合論の無矛盾性について

- [15.2.1] 公理系の保存拡大の概念. ある公理系 Φ に、新しい述語や公理を 付け加えた公理系 Φ' が、保存拡大(Conservative extension)であるとは、 Φ の命題が公理系 Φ' で証明できれば Φ でも証明できることをいう。これは、換言すれば Φ' の定理の中で、 Φ の用語で表現できるものは、 Φ の定理であることを意味する。
- [15.2.2] 定理 (C.Herz). 内的集合論は Zermelo-Fraenkel の公理的集合論の保存拡大である。
- [15.2.3] 系. Zermelo-Fraenkel の公理的集合論が無矛盾ならば、内的集合論 も無矛盾である。
- [15.2.4] 注意. この定理により、内的集合論で得られる古典的定理はすべて、普通の集合論で証明される。しかし、内的集合論の価値は、普通の定理の別証明を得ることだけにあるのではない。その意義としては
- [15.2.4(1)] 豊富な記述力: 無限小に言及する非古典的概念が、直観的内容を直載に表現することを可能とする。(例: S-連続性, S-微分可能性)
- [15.2.4(2)] 内的集合論には、古典的な命題や議論の論理的複雑度を大幅に減らす力があるために、新しい事実の発見に導く潜在力を持つ。(例: Berstein-Robinson の定理: 無限次元のヒルベルト空間の作用素 T が、ある多項式 $p \neq 0$ について $p(T)$ がコンパクトとなると、 T は自明でない閉不変部分空間を持つ。(cf. Robert[0.2.1] Chapter 11.))

結び

超準数学に基づく種々の研究がなされている。解析学への応用（漸近解析、微分方程式の分岐の分析 等々）、確率解析への応用などが著しいが、内的集合論により、応用の可能性は数学の全分野に広がった。

数学という学問の基盤ですら、現在のものとは違う（よりすぐれた面を持つ）選択肢があることを内的集合論は明確に示している。しかし、内的集合論が数学研究の場に浸透するまでには多くの時間を要するであろうし、それどころか忘れ去られてしまう可能性もあろう。生物の進化と同様、学問のもつ多様な可能性の中で将来どれが中心的な基盤をなすようになるのかを予測することはできない。