1994 年度 位相数学特論

# 非有基的集合論入門

北海道大学理学部　数学教室

辻下　徹

1994.7.11–15

## 目 次

**1　非有基的集合論の横顔** **1**

1.1　グラフの用語 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.2　非有基性公理 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.3　グラフの双模倣 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.4　グラフ方程式系の解の存在と解の双模倣同値類の一意性 . . . . . . . . . . . 4

**2　形式系概説** **7**

2.1　一階の述語論理 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

2.2　モデル理論 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

2.3　１階の理論の証明論 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

2.4　ゲーデルの完全性定理 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

2.5　公理論的集合論 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

**3　非有基的集合論概説** **25**

3.1　非有基性公理 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

3.2　非有基性公理の無矛盾性 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

3.3　集合方程式系とその解 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

3.4　集合的クラス作用素の最大固定点 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
3.5　最終余代数定理 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

**4　非有基的集合論の応用　34**

4.1　共通知識 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

# 序

自分自身を含む集合は、２０世紀後半になって数学の世界から公式には姿を消してしまっていたが、理論的計算機科学のプロセス理論を数学的に基礎付ける試みのなかから８０年代後半に甦りし、積極的な役割を果たしはじめている。Aczel はこの種の集合の振る舞いを明確に規定する公理（AFA：Anti-foundation axiom）を見いだし、Zermero-Fraenkel の公理系の中の有基性公理を AFA に置き換えたもののモデルを構成し ([1])、非有基的集合論（non-well-founded set theory）[1]を構築した（わかりやすい紹介としては [2],[3] がある）。

この集合論はプロセス研究にとどまらず、種々の循環的様相を内包する現象の分析・理解を容易にする簡明な記述法を与えており、数学者に馴染み深い集合論の枠組の表現力を飛躍的に増大させた。

集中講義では、実用的な面に重点をおいて非有基的集合論の基礎を解説する。応用例としては知識論理・プロセスモデルを取り上げる。予備知識としては素朴集合論を除いて特に要らない。

談話会では、応用例を通して非有基的集合論の意義を説明する。

[1]これを Hyperset theory と呼ぶ人達もいる。

**講義内容**

1. 非有基的集合論の横顔
   (a) グラフの双模倣
   (b) グラフ方程式系の解の存在と解の双模倣同値類の一意性
2. 形式系概説
   (a) １階の述語論理・モデル理論
   (b) 公理論的集合論
3. 非有基的集合論概説
   (a) 非有基性公理
   (b) 集合方程式系とその解
   (c) 最大固定点定理
   (d) 最終余代数定理
4. 非有基的集合論の応用
   (a) プロセス計算の実現
   (b) 知識論理のモデル

# 参考文献

[1] P.Aczel, *Non-well-founded Sets,* CSLI Lecture Notes No. 14, Center for the Study of Language and Information, Leland Stanford Junior University, 1988.

[2] J.Barwise and J.Etchemendy, *The Liar, An Essay on Truth and Circularity*, Oxford Univ. Press, 1987.

[3] J.Barwise and L.Moss, Hypersets, The Mathematical intelligencer, 13(4), p.31–41, 1991.

# 1 非有基的集合論の横顔

要点

- 非有基性公理 AFA は、任意のグラフに唯一つの飾り付けがあることを保証する。
- 印付グラフは非有基的集合を定義する。
- 到達可能印付グラフの双模倣同値と非有基的集合が一対一に対応する。
- 集合方程式系 $x = a_x \ (x \in X)$ は唯一つの解を持つ。

## 1.1 グラフの用語

集合 $V$ と $E \subset V \times V$ の組 $\Gamma = (V, E)$ を**グラフ** という。$V$ の元を**頂点**、$E$ の元を**辺**という。$V_\Gamma := V$,$E_\Gamma := E$ と書く。$e = (v, w)$ のとき、$\alpha(e) := v$,$\omega(e) := w$ とおく。

$(v, w) \in E$ のとき $v \to_\Gamma w$, あるいは単に $v \to w$ と書く。$v \in V$ に対して、$\mathrm{Child}(v) := \{ w \mid v \to w \}$ と書く。$\mathrm{Child}(v)$ が空であるような頂点 $v$ をグラフ $\Gamma$ の**葉 (leaf)** とよび、その全体を $\mathrm{Leaf}(\Gamma)$ と書く。

グラフ $\Gamma$ の**道**とは、$E_\Gamma$ 上の (有限または無限長) の語$\gamma = e_1 \cdots e_m (m \leq \infty)$ であって

$$\omega(e_k) = \alpha(e_{k+1}) \quad (1 \leq k \leq m-1)$$

を満たすものをいう。$\alpha(\gamma) := \alpha(e_1)$ を**始点**、$m < \infty$ のとき $\omega(\gamma) := \omega(e_m)$ を**終点**という。

$\Gamma$ の有限の道全体を $\mathrm{Path}(\Gamma)$ と書き、$v$ を始点, $w$ を終点とする有限の道の全体を $\mathrm{Path}_\Gamma(v, w)$ と書き,

$$\mathrm{Path}_\Gamma(v, \bullet) := \bigcup_{w \in V} \mathrm{Path}_\Gamma(v, w)$$

とおく。$\mathrm{Path}_\Gamma(v, w) \neq \emptyset$ のとき $v \xrightarrow{*} w$ と書く。

有限な道 $\gamma_i \ (i = 1, 2)$ が $\omega(\gamma_1) = \alpha(\gamma_2)$ を満たすとき、語としての積 $\gamma_1.\gamma_2$ は道となる。$w \in \mathrm{Child}(\omega(\gamma_1))$ のとき

$$\gamma_1 \cdot w := \gamma_1.(\omega(\gamma_1), w)$$

と書く。

グラフ $\Gamma$ とその一つの頂点 $v$の組 $(\Gamma, v)$ を**印付グラフ (pointed graph, pg)** という。印付グラフが**到達可能 (accesible)** であるとは、どの頂点へも $v$からの道が存在することを言う。到達可能な印付グラフを **apg** という。

グラフ$\Gamma$ とその頂点 $v$ を指定すると、到達可能印付グラフ$\Gamma v = ((V, E), v)$ を次のように定めることができる：

$$V := \{ w \mid v \xrightarrow{*} w \}, \quad E := E_\Gamma \bigcap (V \times V)$$

.

印付グラフ $(\Gamma, v)$ が**木 (tree)** であるとは、$|\mathrm{Path}_\Gamma(v, w)| = 1$ が $v$ 以外の任意の頂点 $w$ に対して成り立つことをいう。木は apg である。

## 1.2 非有基性公理

$\Gamma=(V,E)$ をグラフとするとき、集合族 $\{\, d(v) \mid v \in V \,\}$ が $\Gamma$ の**飾り付け（decoration）**であるとは、

$$d(v)=\{\, d(w) \mid w \in \mathrm{Child}(v) \,\} \quad (v \in V)$$

を満たすことをいう。

**補題 1.1** Ｍｏｓｔｏｗｓｋｉの補題. 有基的グラフは唯一つの飾り付けを持つ。（グラフが無限長の道を含まないとき有基的（*well-founded*）であるという。）

**非有基性公理.** すべてのグラフは唯一つの飾付けを持つ。

## 1.3 グラフの双模倣

**1.3.1. 模倣的グラフ準同型** 以下 $\Gamma_k=(V_k,E_k)$ $(k=1,2)$ をグラフとする。写像 $f\colon V_1 \to V_2$ が $(f\times f)(E_1)\subset E_2$ を満たすとき, $f$ は $\Gamma_1$ から $\Gamma_2$ への**グラフ準同型**であるという。

**命題 1.2** $f$ がグラフ準同型であるための必要充分条件は

$$f(\mathrm{Child}(v)) \subset \mathrm{Child}(f(v)) \quad (\forall v \in V_1)$$

がなりたつことである。

グラフ準同型 $f{:}\Gamma_1 \to \Gamma_2$ が**模倣的である**とは

$$f(\mathrm{Child}(v)) = \mathrm{Child}(f(v)) \quad (\forall v \in V_1)$$

がなりたつことである。

模倣的なグラフ準同型は次のようなカテゴリカルな性質を持つ：

**命題 1.3** *1.* グラフ準同型の合成はグラフ準同型である。模倣的なグラフ準同型の合成は模倣的である。

*2.* グラフ準同型 $f_k:\Gamma_k=(V_k,E_k)\to\Gamma=(V,E)$ $(k=1,2)$ に対して, ファイバー積グラフ $(V_1\times{}_V V_2, E_1\times{}_E E_2)$ を$\Gamma_1\times{}_\Gamma\Gamma_2$ と書く。ただし,

$$\begin{aligned} V_1\times{}_V V_2 &:= \{\,(v_1,v_2)\in V_1\times V_2 \mid f_1(v_1)=f_2(v_2)\,\}, \\ E_1\times{}_E E_2 &:= \{\,(e_1,e_2)\in \in E_1\times E_2 \mid (f_1\times f_1)(e_1)=(f_2\times f_2)(e_2)\,\}. \end{aligned}$$

このとき $g_k(v_1,v_2):=v_k$ で定義される写像 $g_k: V_1\times{}_V V_2 \to V_k$ はグラフ準同型写像 $g_k:\Gamma_1\times{}_\Gamma\Gamma_2\to\Gamma_k$ を定める。これを ${}^*f_k$ と書く。$f_k(k=1,2)$ が模倣的ならば,${}^*f_k(k=1,2)$ も模倣的である。

模倣的グラフ準同型は, 葉の集合を保つ:

**命題 1.4** $f:\Gamma_1\to\Gamma_2$ が模倣的グラフ準同型ならば,

$$f(\mathrm{Leaf}(\Gamma_1))\subset\mathrm{Leaf}(\Gamma_2).$$

$(\Gamma_k,v_k)(k=1,2)$ を印付グラフとする。グラフ準同型 $f:\Gamma_1\to\Gamma_2$ が $f(v_1)=v_2$ を満たすとき,$f$ は**印付グラフ準同型 (pg-hom)** であるという。

**命題 1.5** $\Psi_k=(\Gamma_k=(V_k,E_k),v_k)(k=1,2)$ を到達可能印付グラフとし, $f:\Psi_1\to\Psi_2$ を模倣的印付グラフ準同型とする。このとき, $f(V_1)=V_2$ となる。さらに $f(\mathrm{Leaf}(\Gamma_1))=\mathrm{Leaf}(\Gamma_2)$ がなりたつ。

任意の到達可能印付グラフ $(\Gamma,v)$ から, 次のようにして到達可能印付木グラフ $(V',E',v)$ が定義される:

$$\begin{aligned} V' &:= \{\, v \,\}\bigcup \mathrm{Path}_\Gamma(v,\bullet) \\ E' &:= \{\, (\gamma,\gamma.w) \mid w\in\mathrm{Child}(\omega(\gamma)) \,\}\bigcup\{\, (v,(v,w)) \mid w\in\mathrm{Child}(v) \,\}. \end{aligned}$$

$f(v)=v, f(\gamma)=\omega(\gamma)$ で定義される $f:V'\to V$ は, 印付きグラフ準同型 $f:(V',E',v)\to(\Gamma,v)$ を与える。これを $(\Gamma,v)$ の**解きほぐし (unfolding)** という。次は明かに成り立つ。

**命題 1.6** 解きほぐし $f:(V',E',v)\to(\Gamma,v)$ は模倣的である。

**系 1.7** 集合の図示として到達可能印付木グラフをとれる。

**1.3.2. グラフの双模倣対応** 引き続き,$\Gamma_k=(V_k,E_k)\quad(k=1,2)$ をグラフとする。
$R$ がグラフ $\Gamma_1$ と $\Gamma_2$ との間の**双模倣対応**であるとは,$R$ が $V_1\times V_2$ の部分集合であって, 任意の $(v_1,v_2)\in R$に対して,$R$は $\mathrm{Child}(v_1)$ と $\mathrm{Child}(v_2)$ との間の全射対応となっていることをいう。ただし,$R$ が $W_1$ と $W_2$ の間の全射対応であるとは, $W_1R\subset W_2, RW_2\subset W_1$ となっていることをいう。ここで

$$\begin{aligned} W_1R &:= \{\, w_2 \mid \exists w_1\in W_1[(w_1,w_2)\in R \,\} \\ RW_2 &:= \{\, w_1 \mid \exists w_2\in W_2[(w_1,w_2)\in R \,\} \end{aligned}$$

**命題 1.8** $R\subset V_1\times V_2$ が $\Gamma_1$ と $\Gamma_2$ との間の双模倣対応であるための必要かつ十分な条件は, あるグラフ $\Gamma=(V,E)$ と模倣的グラフ写像 $\psi_k:\Gamma\to\Gamma_k(k=1,2)$ とがあって, $R=\{\,(\psi_1(v),\psi_2(v))\mid v\in V\,\}$ となることである。

**定理 1.9** $R\subset\subset V_1\times V_2$ が $\Gamma_1$ と $\Gamma_2$ との間の双模倣対応であるとし,$d_i$ を $\Gamma_i$ の飾り付けとする $(i=1,2)$. このとき, $(v_1,v_2)\in R$ ならば $d_1(v_1)=d_2(v_2)$ となる。

$R$ が到達可能印付グラフ $(\Gamma_i, v_i)$ $(i = 1, 2)$ の間の印付双模倣対応であるとは, $R$ が $\Gamma_1$ と $\Gamma_2$ との間の双模倣対応であり, $(v_1, v_2) \in R$ がなりたっていることをいう。次の定理により, 非有基性公理の下では集合と到達可能印付グラフの印付双模倣同値類とが 1 対 1 に対応することがわかる。

**定理 1.10** *2* つの到達可能印付グラフが同じ集合を定めるための必要かつ充分な条件はその間に印付双模倣対応があることである。

印付双模倣対応も, 模倣的印付グラフ準同型に分解できる:

**命題 1.11** $R \subset V_1 \times V_2$ が印付グラフ $(\Gamma_1, v_1)$ と $(\Gamma_2, v_2)$ との間の印付双模倣対応であるための必要かつ十分な条件は, ある印付グラフ $(\Gamma = (V, E), v)$ と模倣的印付グラフ写像 $\psi_k : (\Gamma, v) \to (\Gamma_k, v_k)$ $(k = 1, 2)$ とがあって, $R = \{ (\psi_1(v), \psi_2(v)) \mid v \in V \}$ となることである。

**問題** Leaf$(\Gamma)$ が空集合であるような到達可能印付グラフ $(\Gamma, v)$ が定める集合は $\Omega$ であることを示せ。

**命題 1.12** $R$ を到達可能印付グラフ $(\Gamma_k = (V_k, E_k), v_k)$ $(k = 1, 2)$ の間の印付双模倣対応とすると, $R$ は全射的である。さらに $\mathrm{Leaf}(\Gamma_1)R = \mathrm{Leaf}(\Gamma_2)$, $R(\mathrm{Leaf}(\Gamma_2)) = \mathrm{Leaf}(\Gamma_1)$ がなりたつ。

**命題 1.13** $R$ をグラフ $\Gamma_1$ と $\Gamma_2$ の間の双模倣対応とする。$v_1 \; R \; v_2$ ならば $R \bigcap \Gamma_1 v_1 \times \Gamma_2 v_2$ は apg $(\Gamma_1, v_1)$ $\Gamma_2, v_2)$ との間の印付双模倣対応を与える。

## 1.4　グラフ方程式系の解の存在と解の双模倣同値類の一意性

### 1.4.1. 変数を含むグラフと集合

変数を含む集合の概念の公理論的な定義は易しくはない。ここでは、葉（子供を持たない頂点）に変数を割当てたグラフ（$X$−グラフ）の双模倣同値類としてとらえ、変数に集合を代入する操作が定義出来ることを示す。

以下一つの集合 $X$ を固定する。$X$ の元は変数の役割を果たす。

$\Gamma$ をグラフとし、$\lambda$ を Leaf$(\Gamma)$ の部分集合から $X$ への写像とする。対 $(\Gamma, \lambda)$ を **$X$-グラフ** と呼ぶ。　$\lambda$ の定義域を $L_\lambda \subset \mathrm{Leaf}(\Gamma)$ と書く。$\lambda(\ell) = x$ のとき、葉 $\ell$ はラベル $x$ を持つという。

$X$-グラフと葉でない頂点 $v$ との組 $(\Gamma, \lambda, v)$ を**点付 $X$-グラフ ($X$-pg )** と呼ぶ。$X$-pg $(\Gamma, \lambda, v)$ が**点付到達可能 $X$-グラフ ($X$-apg )** であるとは、pg $(\Gamma, v)$ が到達可能であることをいう。

$\Gamma(X) = (\Gamma, \ell)$ を $X$-グラフとする。pg の族

$$b_* = \{ b_x = (V_x, E_x, v_x) \mid x \in X \}$$

があるとき、$x$ というラベルをもつ $\Gamma$ の葉にグラフ $b_x$ を印 $v_x$ で貼り付ける操作で新しいグラフを構成できる。これを $X$-グラフ$\Gamma(X)$ に $b_*$ を代入してえられるグラフと呼び$\Gamma(b_*)$ と書く。

$\Psi(x) = (\Gamma(x), v)$ を $X$-pg とする。apg -族 $b_* = \{\ b(x) = (V_x, E_x, v_x) \mid x \in X\ \}$ に対して、pg $(\Gamma(b), v)$ を $\Psi(X)$ に $b$ を代入して得られる pg といい $\Psi(b/x)$ と書く。

$X$-グラフ $((V_k, E_k), \ell_k)$ $(k = 1, 2)$ の間の双模倣対応 $R \subset V_1 \times V_2$ が $X$-**双模倣対応** であるとは、$(v_1, v_2) \in R$ について、$v_1 \in L_{\lambda_1} \Longleftrightarrow v_2 \in L_{\lambda_2}$ となり、さらにこのとき $\ell_1(v_1) = \ell_2(v_2)$ がなりたつことを言う。　さらに　$\Psi_k = (\Gamma_k, \ell_k, p_k)(k = 1, 2)$ を pg $X$-グラフとする。$\Psi_1$ と $\Psi_2$ との間の **印付** $X$-**双模倣対応** とは $\Gamma_1$ と$\Gamma_2$ との間の双模倣対応であって $(p_1, p_2) \in R$ がなりたつものを言う。2 つの $X$-apg $\Psi_1$ と $\Psi 2$ との間に 印付 $X$-双模倣対応があるとき、$\Psi_1$ と $\Psi_2$ とは双模倣同値であるといい、$\Psi_1 \sim \Psi_2$ と書く。

$X$-apg の全体は集合をなさないが、$\sim$ は" 同値関係" となっている：

**命題 1.14** *$X$-apg* $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ について

1. $\Psi_1 \sim \Psi_1$
2. $\Psi_1 \sim \Psi_2 \rightarrow \Psi_2 \sim \Psi_1$
3. $\Psi_1 \sim \Psi_2, \Psi_2 \sim \Psi_3 \rightarrow \Psi_1 \sim \Psi_3$

がなりたつ。

**1.4.2. 集合方程式系の解の存在と一意性**　集合方程式系の定義と解の存在と一意性とを示す。

$X$-集合の族 $\{\ a_x(X) \mid x \in X\ \}$ を $X$-**集合方程式系** と呼ぶ。これを象徴的に

$$x = a_x(X) \quad (x \in X)$$

と書く。

**定理 1.15** 任意の $X$-集合方程式系 $\{\ a_x(X) \mid x \in X\ \}$ に対して、

$$b_x = a_x(b) \quad (x \in X)$$

を満たす集合族 $\{\ b_x \mid x \in X\ \}$ がただ一つ存在する。これを**解**と呼ぶ。

**1.4.3. 集合方程式系の解の存在と一意性と非有基性公理の同値性**　上では非有基性公理を用いて定理 [1.15] を導いたが、逆に定理 [1.15] が非有基性公理を導くことは容易に示される。すなわち、グラフ$\Gamma = (V, E)$ にたいして、頂点 $v$ごとに変数 $x_v$ を用意し、集合方程式系

$$x_v = \{\ x_w \mid w \in \mathrm{Child}(v)\ \} \quad v \in V$$

を考えると、飾り付けはこれの解にほかならない。従って、定理から非有基性公理が導かれる。

**ラベル付きグラフの飾り付けの存在と一意性** グラフΓの各頂点 $v$ に集合$\lambda(v)$ が割り当てられているとき、

$$d(v) \ = \ \ell(v) \cup \{ \ d(w) \mid w \in \mathrm{Child}(v) \ \}$$

を満たす集合族 $d$ がただ一つ存在することがわかる。実際

$$x_v = \ell(v) \cup \{ \ x_w \mid w \in \mathrm{Child}(v) \ \} \quad v \in V$$

という集合方程式系の解として $d$ がえられる。

**注意. 定理** [1.15] **では扱えない「集合方程式」** 次のような「集合方程式」は、定理 [1.15] では扱えない：

$$\begin{aligned} x &= x \times x \\ x &= x \times A \quad (A \text{ は決まった集合}) \\ x &= \wp(x) \\ x &= \mathrm{Map}(x, x) \end{aligned}$$

なぜならば、右辺は $X$-集合ではないからである。応用上はこの型の方程式の解が必要となるが、それは一般には集合の範囲では求められず、「クラス」を考えるてはじめて解の存在を示せる場合がでてくる。($x = \wp(x)$ の解が集合として存在すれば Russel の矛盾が生じる：集合 $\{ \ a \in x \mid a \notin a \ \}$ を考えよ。)

# 2 形式系概説

形式系概説形式系概説

## 2.1 一階の述語論理

### 2.1.1. 形式言語

**語** 集合Σに対して

$$\Sigma^{+} := \Sigma \coprod \Sigma^{2} \coprod \Sigma^{3} \coprod \cdots$$

とおく。新しい記号 $\lambda$を $\Sigma^{+}$ に付け加えたものを$\Sigma^{*} := \{\ \lambda\ \} \coprod \Sigma^{+}$ と書く。$\Sigma^{+}$ の元を積の形に $a_1 \cdots a_n$ と書き、 Σ上の語と呼ぶ。2つの語を並べたものを新しい語とみなすことにより結合律を満たす積が $\Sigma^{+}$ 上に定義される。

$$\lambda w = w\lambda = w \quad w \in \Sigma^{*}$$

とおくことにより $\Sigma^{*}$は $\lambda$を単位元とする半群となる。$w \in \Sigma^{n}$ のとき $\ell(w) = n$ とおき、これを 語 w の長さという。

$w = w_1 w_2 w_3$ $(w_i \in \Sigma^{*})$ と書けるとき、$w_1, w_2, w_3$ を各々$w$の**接頭語**、**部分語**、**接尾語**という。$w$ の最初の文字を $w$ の**頭字** という。

**準同型** 集合$\Sigma_i$ $(i = 1,\ 2)$ に対し、写像 $f : {\Sigma^{*}}_1 {\to} {\Sigma^{*}}_2$ が

$$f(\lambda) = \lambda, \quad f(w_1 w_2)\ =\ f(w_1)f(w_2)$$

を満たすとき**準同型**であるという。 準同型 $f$ は文字集合$\Sigma_1$ の上の挙動 $f|\Sigma_1$ で決定される。逆に任意の写像 $g : {\Sigma^{*}}_1 {\to} {\Sigma^{*}}_2$ は $g^{*}a_1 \cdots a_n\ :=\ g^{*}(a_1) \cdots g^{*}(a_n)$ $(a_i \in \Sigma_1)$ により唯一つの準同型 $g^{*} : {\Sigma^{*}}_1 {\to} {\Sigma^{*}}_2$ に拡張される。

**代入** Σの部分集合$\Sigma_1$ からΣ*への写像$\sigma$はΣ$\setminus \Sigma_1$ 上で$\sigma(x)\ =\ x$ とおいてΣからの写像に拡張しておけば、準同型$\sigma^{*} : \Sigma^{*} {\to} \Sigma^{*}$ を引き起こす。$\Sigma_1\ =\ \{\ x_1, \cdots, x_m\ \}$, $\sigma(x_i)\ =\ s_i$ のとき$\sigma^{*}u$ を $u[s_1/x_1, \cdots, s_n/x_n]$ と書き、$u$ に代入 $x_i\ =\ s_i$ をした語という。

**形式言語** $\Sigma^{*}$の部分集合のことを、**文字集合Σ上の形式言語**という。

**形式言語の演算** Σ上の形式言語 $L, L_1, L_2$ と $w \in \Sigma^{*}$ に対し

$$\begin{aligned} w\ L &:= \{\ wu \mid u \in L\ \} \\ L_1\ L_2 &:= \{\ w_1 w_2 \mid w_i \in L_i\ (i = 1,\ 2)\ \} \\ L^{*} &:= \bigcup_{k=0}^{\infty} L^{k} \quad (L^{0} := \{\ \lambda\ \}). \end{aligned}$$

とおく。通常の集合論的演算も新しい形式言語を生成する。

### 2.1.2. 生成則と Post 系

**生成則**　集合 $\Sigma$と交わらない集合の一つを $X$ とする。$((\Sigma\coprod X)^*)^+\times(\Sigma\coprod X)^*$ の元を$\Sigma$上の**生成則**といい、$X$ の元を型変数と呼ぶ 。型変数は通常$\#_1,\cdots,\#_m$ などで表す。 生成則 $p=(w_1,\cdots,w_k,w)$ を $p:w_1,\cdots,w_{\searrow}w$ と表記する。$(\Sigma^*)^*\times\Sigma^*$ の元 $(u_1,\cdots,u_k,u)$ が $p$ の一つの**具体化**であるとは、写像 $f:X\to\Sigma^*$ が存在して $u_i = f^*w_i$, かつ $u = f^*w$ となることをいう。このとき $u_1,\cdots,u_k\searrow_p u$ と表す。

$A\subset\Sigma^*$ に対して、

$$D_p(A):=A\bigcup\{\ v\in\Sigma^*\mid v_1,\cdots,v_k\searrow_p v\ \text{となる}\ v_i\in A\ \text{が存在}\ \}$$

とおく。

**Post 系**　$\Sigma$上の生成則の集まりを S 上の Post **系**という。Post 系 $P$ に対して

$$D_P:\wp(\Sigma^*)\to\wp(\Sigma^*)$$

を $D_P(A):=\bigcup_{p\in P}D_p(A)$ により定義する。このとき$\Sigma^*$の部分集合 $A$ に対して、形式言語が

$$L(\Sigma,A,P):=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_P^n(A)$$

により定義される。さらに、 $\Sigma$の部分集合$\Lambda$に対しては、

$$L(\Sigma,A,P,\Lambda):=L(\Sigma,A,P)\bigcap\Lambda^*$$

とおく。

### 2.1.3. 項

**作用素型**　集合$\Omega$と写像 $\alpha:\Omega\to\mathbf{N}$ との組 $(\Omega\ ,\ \alpha)$ を**作用素型**という。$\Omega_i:=\alpha^{-1}i$ と書く。$\alpha(\omega)$ を作用素 $\omega$ の**アリティ**と呼ぶ。

**項**　集合 $Var$が$\Omega$と交わらないとき、Post 系

$$P\ =\ \{\ \#_1,\cdots,\#_n\searrow\omega\#_1\cdots\#_n\mid n\geq 1,\quad\omega\in\Omega_n\ \}$$

を用いて

$$\mathrm{F}_\Omega[Var]:=L(\Omega\ ,\ \Omega_0\cup Var\ ,\ P)$$

と定義し、この元を**項**という。$Var$の元を**変数**という。$Var=\{\ x,y,\ldots\ \}$ のとき $\mathrm{F}_\Omega[Var]$ を $\mathrm{F}_\Omega[x,y,\ldots]$ とも書く。

項についての性質は次の補題から容易に示される：

**補題 2.1** 項 $t$ が項 $s$ の接頭語ならば $s=t$ となる。

**命題 2.2** 任意の項 $t$ は唯一通りの仕方で

$$t\ =\ \omega t_1\cdots t_n\quad(\omega\in\Omega_n),\ t_i\in\mathrm{F}_\Omega[Var]$$

とあらわせる。（証略）

**項の含む変数**　作用素型$\Omega$と変数集合 $Var$から作られる項には、$Var$の一部の変数しか現れない。項 $t\in\mathrm{F}_\Omega[Var]$ に対して　$Var[t]:=\cap\{\ V\subset Var\mid t\in F_\Omega[V]\ \}$ とおき、$x\in Var[t]$ のとき、変数 $x$ は項 $t$ に出現するという。

## 2.2 モデル理論

**2.2.1. Ωー構造による項の解釈** Ωを作用素型とする。集合 $A$ 上にΩ-**構造を与える**とは、各$\omega$に対して写像$\omega_A : A^{\alpha(\omega)} \to A$ を対応させせることをいう。写像の組 $\{ \omega_A \mid \omega \in \Omega \}$ を $A$ 上のΩー構造という。集合 $A$ とその上のΩー構造の組 $(A,\ \Omega_A)$ をΩー**集合**という。

$(A_i, \Omega_{A_i})$ $(i = 1, 2)$ をΩー集合とする。写像 $f : A_1 \to A_2$ が Ωー**準同型**であるとは、

$$f\omega_{A_1}(x_1, \cdots, x_n) = \omega_{A_2}(fx_1, \cdots, fx_n) \quad \forall\omega \in \Omega,\ \forall x_i \in A,$$

が成立することをいう。

$\mathrm{F} := \mathrm{F}_\Omega[Var]$ には次のようにして自然なΩー構造が与えられる：$\omega \in \Omega_n,\ t = (t_1, \cdots, t_n) \in F^n$に対して、

$$\omega_F(t_1, \cdots, t_n) := \omega t_1 \cdots t_n,$$

と定義する。

**定理 2.3** $F$は$Var$**で生成される自由** Ωー**集合**である、すなわち、任意のΩー集合と、写像 $\varphi : Var \to A$ に対して、$\tilde{\varphi}|_{Var} = \varphi$ を満たす Ωー準同型$\tilde{\varphi} : F \to A$ が丁度一つ存在する。

**代入** Ωを作用素型、$Var_i$ $(i = 1,\ 2)$ を変数集合とする。写像$\sigma\ :\ Var_1 \to \mathrm{F}_\Omega[Var_2]$ は定理により Ωー準同型$\sigma^*\ :\ \mathrm{F}_\Omega[Var_1] \to \mathrm{F}_\Omega[Var_2]$ をひきおこす。語の時と同様に$\sigma^* t$ を $t[\{\ \sigma x/x \mid x \in Var_1\ \}]$, あるいは$t[\sigma x_1/x_1, \sigma x_2/x_2, \ldots]$ などとも書く。

**項の解釈** 各項 $t \in \mathrm{F}_\Omega[Var]$ に対して $A$ 上の作用素 $t_A \in A[Var] = \mathrm{Map}(A^{Var}, A)$ を次のように定めることができる：$\delta \in A^{Var} = \mathrm{Map}(Var, A)$ に対して、$t_A(\delta) := \tilde{\delta}(t)$ と定める。この $t_A$ を項 $t$ の**解釈**という。たとえば、変数 $x \in Var$ については $x_A(\delta) = \delta(x)$ となる。

$(A, \Omega_A)$ をΩー集合とする。$D$ を任意の集合するとき、$A^D = \mathrm{Map}(D, A)$ には、値に$\omega_A$を作用させせることでΩー構造が入る、すなわち

$$\omega_{\mathrm{Map}(D,\,A)}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)(\delta) := \omega_A(\varphi_1(\delta), \cdots, \varphi_n(\delta)) \quad (\delta \in D)$$

とおくと、$\omega_{\mathrm{Map}(D,\,A)}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \in A^D$が得られる。特に $D = A^V$のとき $A[V] := \mathrm{Map}[A^V, A]$ には自然なΩー構造が入る。

次は容易に示される。

**命題 2.4** $t \mapsto t_A$ は Ωー準同型 $\mathrm{F}_\Omega[Var] \to A[Var]$ を定める。

**命題 2.5** $t \in \mathrm{F}_\Omega[Var]$ と$\delta \in \mathrm{F}_\Omega[Var]^{\mathrm{Var}} = \mathrm{Map}(Var,\ \mathrm{F}_\Omega[Var])$ に対して

$$t_F(\delta) = \delta^* t$$

.

**2.2.2. 1階の言語** 集合 $\Pi$ と写像$\alpha : \Pi \to \mathbf{N}$ の組 $(\Pi, \alpha)$ を**述語型**という。$\Pi_k := \alpha^{-1}k$ とおく。作用素型と述語型の組 $(\Omega, \Pi, \alpha)$ を**1階の言語**と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
P^{\text{atom}}_{\Omega,\Pi} \ :=\ & \Pi_0 \bigcup \{\ pt_1 \cdots t_n \mid p \in \Pi_n\ (n \geq 1)\ ,\ t_i \in \mathrm{F}_\Omega[Var]\ \} \\
& \bigcup \{\ t_1 \doteq t_2 \mid t_1\ ,\ t_2 \in \mathrm{F}_\Omega[Var]\ \} \bigcup \{\ \perp\ \}
\end{aligned}
$$

とおき、この元を**原始命題**という。

$$\Pi^{lgc} := \{\ "\ )"\ ,\ "(\ "\ ,\ \to\ ,\ \perp\ ,\ \forall\ ,\ \doteq\ \}$$

を論理記号とし、$\Sigma := \Omega \cup \Pi \cup \Pi^{lgc} \cup Var \cup \{\ \mathrm{F}\ \}$ 上の次の Post 系を考える：

$$
\begin{aligned}
\#_1\ ,\ \#_2 &\ \searrow\ (\#_1)\to(\#_2), \\
x\mathrm{F}\#\ ,\ \# &\ \searrow\ \forall x(\ \#\ ) \quad (x \in Var) \\
y\mathrm{F}\#\ ,\ \forall x(\ \#\ ) &\ \searrow\ y\mathrm{F}\forall x(\ \#\ ) \quad (x \neq y \in Var) \\
x\mathrm{F}\#_1\ ,\ x\mathrm{F}\#_2\ ,\ (\#_1)\to(\#_2) &\ \searrow\ x\mathrm{F}(\#_1)\to(\#_2).
\end{aligned}
$$

また初期集合を

$$A := \{\ x\mathrm{F}\perp \mid x \in Var\ \} \bigcup \left\{\ x\mathrm{F}\varphi \mid \varphi \in \P^{\text{atom}}_{\Omega,\,\Pi}\ ,\ x \in Var\ \right\} \bigcup P^{\text{atom}}_{\Omega,\,\Pi}$$

とおき、

$$P_{\Omega,\,\Pi}[Var] := L(\Sigma\ ,\ A\ ,\ P\ ,\ \Sigma \setminus \{\ \mathrm{F}\ \})$$

と定め、この元を**論理式**と呼ぶ。論理式$\varphi$ に対して、

$$\mathrm{FV}(\varphi) := \{\ x \in Var \mid x\mathrm{F}\varphi \in L(\Sigma\ ,\ A\ ,\ P)\ \}$$

とおき、この元を**論理式$\varphi$ の自由変数**という。$Var(\varphi) \setminus \mathrm{FV}(\varphi)$ の元を、**論理式$\varphi$ の束縛変数**という。ただし

$$Var(\varphi) := \bigcap \{\ V \subset Var \mid \varphi \in \mathrm{P}_{\Omega,\,\Pi}[V]\ \}.$$

論理式$\varphi$ の束縛変数の全体を $\mathrm{BV}(\varphi)$ と書く。

形式言語 $\mathrm{F}_\Omega[Var] \coprod \mathrm{P}_{\Omega,\,\Pi}[Var]$ を理論型$\Omega, \Pi$ の決める**一階の言語**という。

**他の論理記号** 通常使う他の論理記号は省略形（マクロ）と解釈する ：

$$
\begin{aligned}
\top &\ \equiv\ \perp\to\perp \\
\neg(\varphi) &\ \equiv\ (\varphi)\to\perp \\
(\varphi_1) \vee (\varphi_2) &\ \equiv\ \neg(\varphi_1)\to(\varphi_2) \\
\varphi_1 \wedge \varphi_2 &\ \equiv\ \neg(\neg(\varphi_1) \vee \neg(\varphi_2)) \\
\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 &\ \equiv\ (\varphi_1\to\varphi_2) \wedge (\varphi_2\to\varphi_1) \\
\exists x(\varphi) &\ \equiv\ \neg\forall x(\neg(\varphi)) \\
x \not\doteq y &\ \equiv\ \neg x \doteq y
\end{aligned}
$$

なお優先度は$\neg, \forall x, \wedge, \vee, \to$ の順に下がるとする。$\neg, \forall x$ はともにアリティが 1 なので同じ優先度としてよい。$\doteq$ は種類が違うので問題は起こらない。

**2.2.3. 1階の構造による論理式の解釈** 集合 $A$ 上の$\Omega-$構造$\Omega_A$ と写像族$\{\, p_A : A^{\alpha(p)} \to \{\, 0,1 \,\} \mid p \in$ の組を$\Omega,\Pi$**ー構造** という。(ただし、$\alpha(p)=0$ の場合は $p_A \in \{\, 0,1 \,\}$ と考える。)$p_A$ は $A^{\alpha(p)}$ の部分集合 $\{\, a \mid p_A(a)=1 \,\}$ と同一視する。$A$ とその上の$\Omega,\Pi-$構造の組を$\Omega,\Pi$**ー集合** という。

$\Omega,\Pi-$集合があると前に定義した $\mathrm{F}_\Omega[Var] \to A[Var]$ により、項に意味を与えることができるだけでなく、論理式にも意味を与えることができる。すなわち写像

$$\mu : \mathrm{P}_{\Omega,\Pi}[Var] \to \mathrm{Map}(A^{Var}\,,\ \{\, 0,1 \,\}) = \wp(A^{Var})$$

を次のように定義できる。まず、原始述語$\varphi = pt_1 \cdots t_n$ に対しては

$$\mu(\varphi)(\delta) \ := \ p_A(t_{1A}(\delta), \cdots, t_{nA}(\delta)), \quad (\delta \in A^{Var})$$

$\varphi = t \doteq s$ に対しては

$$\mu(\varphi)(\delta) \ := \ \Delta(t_A(\delta)\,,\ s_A(\delta))$$

($\Delta(x,y)=0$ $(x \neq y)$,$1$ $(x=y)$)と定め、$\varphi_A := \mu(\varphi)$ と書く。次に、$\perp_A = 0$ と定め一般の論理式に対しては帰納的に$\delta \in A^{Var}$ に対して、

$$\begin{aligned}(\varphi \to \phi)_A(\delta) &:= \max(1-\varphi_A(\delta)\,,\ \phi_A(\delta)),\\ (\forall x \varphi)_A(\delta) &:= \min\{\, \varphi_A(\delta[a/x]) \mid a \in A \,\}\end{aligned}$$

とおく。ただし、$\delta[a/x] \in A^{Var}$ は $x \mapsto a$,$y \mapsto \delta(y)$ $(y \neq x)$ で定義される。また $0,1 \in A^{Var}$ は定数写像を表す。

$\varphi_A = 1$ のとき $A \models \varphi$ と書き、$\Omega,\Pi-$集合 $A$ は**論理式**$\varphi$ **のモデル**であるという。定義から次が容易にわかる:

**命題 2.6** 任意の 論理式 $\forall x \varphi$ に対して $(\forall x \varphi)_A = 1$ と$\varphi_A = 1$ とは同値である。

**2.2.4. 1階の理論とそのモデル**

**モデル** 理論型($\Omega,\Pi$)と閉じた論理式の集合 $\Phi \subset \mathrm{P}_{\Omega,\Pi}[Var]$ の組 $T = (\Omega,\Pi,\Phi)$ を**1階の理論**という。 $\Phi$の元を理論 $T$ の公理という。

$A$ 上の $T-$**構造**とは、$A$ 上の $\Omega,\Pi-$構造であって $A \models \Phi$ すなわち

$$A \models \varphi \quad (\forall \varphi \in \Phi)$$

となるもののことをいう。$T-$構造を与えた集合 $A$ を $T$ の**モデル**という。

**「定理」** 論理式$\varphi$ が $T$の任意のモデル $A$ について $A \models \varphi$ を満たすとき$\varphi$ は理論 $T$ の**定理**であるといい、$\Phi \models \varphi$ とかく。定理の全体を $\mathrm{Thm}(T)$ とかく。たとえば、任意の公理 $\varphi$ と単射 $\sigma : Var \to Var$ に対して $\sigma^* \varphi$ は定理である。また $\varphi$ が公理で、$x$ がその自由変数ならば $\forall x \varphi$ は定理である。

**トートロジー** 理論 $(\mathcal{L}, \emptyset)$ の定理を**言語** $\mathcal{L}$ **の論理的定理**あるいはトートロジーという。論理的定理は $\mathcal{L}$ 上のすべての理論の定理となっている。

**トートロジーの例** (2.2.4.1) ブール代数のトートロジーの命題変数に任意の論理式を代入したものはトートロジーである。

(2.2.4.2) $\forall x\varphi \to \varphi \quad (x \in \mathrm{FV}(\varphi))$,
(2.2.4.3) $\varphi \to \varphi[t/x] \quad (x \in \mathrm{FV}(\varphi), t \in \mathrm{F}_\Omega[Var])$,
(2.2.4.4) $x \doteq y \wedge y \doteq z \to x \doteq z$.

**同値な論理式** $\varphi \leftrightarrow \phi$ がトートロジーであるとき、論理式 $\varphi$, $\phi$ は**同値**であるという。このとき、任意の $\mathcal{L}-$集合 $A$ において、$\varphi_A = \phi_A$ となるので、

(2.2.4.5) $$\Phi \models \varphi \Longleftrightarrow \Phi \models \phi$$

が $\mathcal{L}$ 上の任意の１階の理論 $T$ について成り立つ。

**例** 次はトートロジーである。

(2.2.4.6) $(\varphi \to \forall x\phi) \leftrightarrow \forall x\,[\varphi \to \phi] \quad (x \notin \mathrm{Var}(\varphi))$
(2.2.4.7) $(\varphi \to \exists x\phi) \leftrightarrow \exists x\,[\varphi \to \phi] \quad (x \notin \mathrm{Var}(\varphi))$
(2.2.4.8) $(\exists x\varphi \to \phi) \leftrightarrow \forall x\,[\varphi \to \phi] \quad (x \notin \mathrm{Var}(\phi))$.
(2.2.4.9) $(\forall x\varphi \to \phi) \leftrightarrow \exists x\,[\varphi \to \phi] \quad (x \notin \mathrm{Var}(\phi))$.

**同値な論理式の置き換え** $\varphi, \varphi'$ は同値な論理式とする。ある論理式 $\phi$ が $\varphi$ を含むとし、$\phi'$ は $\phi$ の中の $\varphi$ を $\varphi'$ に置き換えた論理式とする。このとき$\phi$ と $\phi'$ とは同値である。

**無矛盾性と完全性** 理論 $T$ はモデルを持つとき**無矛盾**であるという。また任意の閉じた論理式$\varphi$ について$\varphi$ が定理であるかあるいはその否定$\neg\varphi$ が定理であるとき理論 $T$ は**完全**であるという。このとき、論理式はあるモデルで正しいければ定理となる。

### 2.2.5. １階の理論の例

**例：命題演算** $\Omega$ が空集合であり、$\Pi = \Pi_0$であるような１階の理論を命題演算理論という。この理論では項は存在しないので変数集合と論理記号 $\doteq$ とは何の役目も果たさない。原始命題の全体は $\Pi_0$ と一致し、これは「命題変数」と呼ばれて変数の役割を果たす。この理論型の構造は $\{\,0,1\,\}^{\Pi_0} = \mathrm{Map}[\Pi_0, \{\,0,1\,\}]$ の元と一対一に対応する。この理論型の上の理論で空集合を公理系とする理論を命題演算理論といい、その定理となる論理式をトートロジーとよぶ。

**例：代数的理論** $\Pi$ が空集合であるような１階の理論を代数的理論という。このとき述語記号は$\doteq$ のみであり、原始命題は $t \doteq s \quad (t, s \in \mathrm{F}_\Omega[Var])$ という形になる。

**例：自然数の公理** $\Omega, \Pi = \{\,0, S\,\}$, $\Pi = \emptyset$ とする。ただし、$0, S$ のアリティは各々 $0, 1$ であるとする。公理としては

(P1) $0 \not\doteq Sx$,
(P2) $Sx \doteq Sy \to x \doteq y$

と、$FV(\varphi) = \{\,x\,\}$ であるような任意の論理式 $\varphi$ ごとに

($\mathrm{P}_\varphi$) $$\varphi[0/x] \wedge \forall x\,(\varphi \to \varphi[Sx/x]) \to \forall x\varphi$$

を加える。従って公理の数は可算無限ある。こういった公理の族を公理図式という。自然数の全体はこの理論のモデルとなっている。しかし自然数全体以外にもモデルはあることが知られている。

**例：ペアノ公理** 通常の可算・積などの演算は、この公理系の論理式では定義できないので、自然数の理論を形式化するには、これらをあらかじめ理論型に含んでおかなければならない。そこで$\Omega, \Pi = \{\ 0, S,' +',' \cdot'\ \}$, $\Pi = \emptyset$ とする。ただし、$0, S,' +',' \cdot'$ のアリティは各々 $0, 1, 2, 2$ であるとする。$'+','\cdot'$ には中置記法を用い、優先順序を

$$S\ >\ '\cdot'\ >'+'$$

と定める。公理として P1,P2,P$_\varphi$ に次を加える。

(P3) $x + 0 \doteq x,$
(P4) $x + Sy \doteq S(x + y),$
(P5) $x \cdot 0 \doteq 0,$
(P6) $x \cdot Sy \doteq x \doteq y + x.$

## 2.3 1階の理論の証明論

### 2.3.1. 1階の理論の公理と推論規則

**公理** トートロジーの中から次のものを公理として選ぶ：

($A1$) $p{\rightarrow}q{\rightarrow}p$
($A2$) $(p{\rightarrow}(q{\rightarrow}r)){\rightarrow}((p{\rightarrow}q){\rightarrow}(p{\rightarrow}r))$
($A3$) $\neg\neg p{\rightarrow}p$

の $p, q, r$ に任意の論理式を代入したもの。

($A4$) $\forall x\varphi{\rightarrow}\varphi[t/x] \quad (x \in \mathrm{FV}(\varphi), \mathrm{FV}(t) \cap \mathrm{BV}(\varphi) = \emptyset),$
($A5$) $\forall x[\varphi_1{\rightarrow}\varphi_2]{\rightarrow}(\varphi_1{\rightarrow}\forall x\varphi_2) \quad (x \notin \mathrm{FV}(\varphi_1)),$
($A6$) $\forall x[x \doteq x],$
($A7$) $\forall x\forall y[x \doteq y \rightarrow \varphi{\rightarrow}\varphi[y/x]] \quad (x \in \mathrm{FV}(\varphi), y \notin \mathrm{BV}(\varphi)).$

これらの論理式の全体を $\Phi_{\mathrm{logic}}$ と書く。

**推論規則** Modus Ponent

(MP) $\#_1,\ \#_1{\rightarrow}\#_2 \ \searrow\ \#_2$

と、各初期集合 $A$ に対して

(Gen) $\#\ \searrow \forall x(\#).$

ただし、(Gen) では、$x \in \mathrm{FV}(\#) \setminus \mathrm{FV}(A\langle\#\rangle)$ とする。ここで一般に $S \subset \mathrm{P}_{\Omega,\,\Pi}[Var]$ に対して

$$\mathrm{FV}(S) := \cup_{\phi \in S}\mathrm{FV}(\phi).$$

また $A$ から既に (MP) と (Gen) によっ

て得られている$\varphi$ について

$$A\langle\varphi\rangle := \bigcap \{\, A' \subset A \mid A' \text{ から (MP) と (Gen) により}\varphi\text{ が生成される} \,\}$$

とおく。１階の理論の非論理的公理の場合のように $A$ が自由変数を含まない時は上の条件は自明に成り立つ。しかし、演繹定理を利用するときは $A$ として自由変数を含むものも必要となる。

$A \in \mathrm{P}_{\Omega,\,\Pi}[Var]$ に対して初期集合 $A \cup \Phi_{\text{logic}}$ からこの２つの生成規則によって生成される形式言語を Provable$(A)$ $(\subset \mathrm{P}_{\Omega,\,\Pi}[Var])$ と書く。論理式 $\varphi$ が Provable$(A)$ の元であることを $A \vdash \varphi$ と書き、**論理式 $\varphi$ は仮定 $A$ から導かれる**あるいは**証明できる**といい、$A \vdash \varphi$ と書く。空集合から導かれる論理式を**論理的定理**という。

**証明の概念**　論理式 $\varphi$ が仮定 $A$ から導かれるとき、定義から、次の性質を持つ論理式の有限列 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ が存在する。$\varphi_m = \varphi$

であり、任意の $k \in [1, \cdots, m]$ に対して次のいずれかが成り立つ：

(2.3.1.1) $\varphi_k \in A \cup \Phi_{\text{logic}}$
(2.3.1.2) $\varphi,\ \varphi \to \varphi_k \in A \cup \Phi_{\text{logic}} \cup \{\, \varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1} \,\}$
(2.3.1.3) $\varphi_k \equiv \forall x\varphi,\ \varphi \in A \cup \Phi_{\text{logic}} \cup \{\, \varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1} \,\} \quad (x \notin \mathrm{FV}(A))$

この列のことを $A \vdash \varphi$ の**証明** という。

**仮定の有限性**

**定理 2.7**

(2.3.1.4) $$\mathrm{Provable}(A) = \bigcup_{B \subset A,\, B \text{ は有限}} \mathrm{Provable}(B)$$

**証明の例**

(2.3.1.5) $$A := \{\, \varphi_1 \to \varphi_2,\ \varphi_2 \to \varphi_3 \,\} \vdash \varphi_1 \to \varphi_3$$

は次の論理式の列で証明される：

(1) $\varphi_2 \to \varphi_3 \quad (\in A)$
(2) $((\varphi_2 \to \varphi_3) \to (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3))) \quad (\in (A1))$
(3) $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)) \quad (1, 2, (\mathrm{MP}))$
(4) $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_3)) \quad (\in (A2))$
(5) $((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_3)) \quad (3, 4, (\mathrm{MP}))$

(6) $\varphi_1 \to \varphi_2$ $(\in A)$
(7) $\varphi_1 \to \varphi_3$ $(5, 6, (\mathrm{MP}))$

**練習問題**　次を証明せよ：

(2.3.1.6) $\vdash \varphi \to \varphi$
(2.3.1.7) $\vdash \bot \to \varphi$
(2.3.1.8) $\vdash \neg \varphi_1 \to \varphi_1 \to \varphi_2$
(2.3.1.9) $\{ \varphi_1 \to \varphi_2 \} \vdash \neg \varphi_2 \to \neg \varphi_1$
(2.3.1.10) $\vdash \varphi[c/y] \to \exists x \varphi \quad (x \notin \mathrm{FV}(\varphi))$
(2.3.1.11) $\vdash \exists x[\varphi_1 \to \varphi_2] \to [\exists x \varphi_1 \to \varphi_2] \quad (x \notin \mathrm{FV}(\varphi_2))$

## 2.4 ゲーデルの完全性定理

１階の理論については論理式が証明できること（形式的＝統語的＝組み合わせ論的な性質）が真であること（意味論的な性質）とが同じであることを主張するのが完全性定理である。

**定理 2.8 完全性定理.** $\Omega, \Pi$を１階の言語とする。任意の $A \subset \mathrm{P}_{\Omega,\,\Pi}[Var]$ と論理式 $\varphi$ に対して

$$A \models \varphi \iff A \vdash \varphi.$$

**推論の正当性** 次の定理は、証明される論理式が定理であることを主張する。これが成り立つように公理と推論規則を選ばなければ意味がないので、「証明論の健全性定理」と呼ばれている。

**定理 2.9 健全性定理.** $A \vdash \varphi$ ならば $A \models \varphi$.

**演繹定理** 論理式 $\varphi_1 \to \varphi_2$ の証明論的な意味を与えるのが次の定理である。

**定理 2.10** $A \subset \mathrm{P}_{\Omega,\,\Pi}[Var], \varphi_i \in \mathrm{P}_{\Omega,\,\Pi}[Var]\ (i = 1,\ 2)$ について

(2.4.0.12) $$A \vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \iff A \cup \{\ \varphi_1\ \} \vdash \varphi_2$$

**無矛盾性ならばモデルが存在する** $\Phi \not\vdash \perp$ のとき、$\Phi$ は**無矛盾である**という。[1] で定義した無矛盾性を今後モデル理論的無矛盾性という。

次の定理が完全性定理の中核を成す：

**定理 2.11** 充足定理. 無矛盾な１階の理論はモデルを持つ。

**定理と証明可能性の同一視** 以下、$\models$ と $\vdash$ を同一視し、$\models$ をいつも用いる。

### 2.4.1. 理論の拡大

一つの理論に、新しい作用素記号や述語記号を導入し、さらに、それらの使い方を定める論理式を公理に添加する操作は、文字列としての論理式の複雑さを理解可能な範囲に保つことを可能にするので、実践的な観点からは重要である。この操作を行っても理論に新しい内容が付け加わらないことを、この節で確認する。

**言語の拡大** 理論型 $\mathcal{L}' = (\Omega',\ \Pi')$ が理論型 $\mathcal{L} = (\Omega, \Pi)$ の**拡大**であるとは $\Omega \subset \Omega'$ かつ $\Pi \subset \Pi'$ がなりたつことをいう。このとき $\mathrm{F}_\Omega[Var] \subset \mathrm{F}_{\Omega'}[Var]$, $\mathrm{P}_{\Omega,\,\Pi}[Var] \subset \P_{\Omega',\Pi'}[Var]$ が成り立つ。

集合 $A$ の上の $\Omega', \Pi'$−構造から自然に $\Omega$ー構造が決まる。これを構造の制限という。すでにある $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{S}$ を制限として持つ $\mathcal{L}'$ 構造を $\mathcal{S}$ の**拡大**という。

**理論の拡大** １階の理論 $T' = (\Omega', \Pi',\ \Phi')$ が $T = (\Omega, \Pi,\ \Phi)$ の**拡大**であるとは 理論型 $\Omega', \Pi'$が $\Omega, \Pi$の拡大であり、$\Phi \subset \mathrm{Thm}(T')$ が成り立つことをいう。このとき $\mathrm{Thm}(T) \subset \mathrm{Thm}(T')$ となっている。さらに

$$\mathrm{Thm}(T)\ =\ \mathrm{Thm}(T') \bigcap \mathrm{P}_{\Omega,\,\Pi}[Var]$$

が成り立つとき、$T$ は $T'$ の**定理保存拡大**であるという。$\mathrm{Thm}(T)$ の定義から次の命題は明かである。

**命題 2.12** $T'$ を１階の理論 $T$ の拡大とする。任意の $T$ のモデル $A$ について、その $T-$構造を拡張する $T'-$構造が存在するならば、$T'$ は $T$ の定理保存拡大である。

次の定理は、論理式が「定理」であることを示すとき有用である。

**定理 2.13**

$$\Phi \models \phi \to \psi \iff \Phi \cup \{\ \phi\ \} \models \psi$$

**新述語記号の導入による定理保存拡大** $\varphi \in \mathrm{P}_{\Omega,\ \Pi}[Var]$ を任意の論理式とし $FV(\varphi) = \{\ x_1, \cdots, x_n\ \}$ とする。このときアリティ $n$ の新しい述語記号 $p_\varphi$ を $\Pi$ に添加したものを $\Pi_\varphi$ とし、論理式 $p_\varphi x_1 \cdots x_n \leftrightarrow \varphi$ を $\psi_\varphi$ と書く。このとき

**命題 2.14** 新しい記号 $p_\varphi$ を含む任意の論理式 $\phi$ に対して

$$\psi_\varphi \models \phi \leftrightarrow \phi^0$$

を満たす $\phi^0 \in \mathrm{P}_{\Omega,\ \Pi}[Var]$ がとれる。

**定理 2.15** $T = (\Omega, \Pi, \Phi)$ を１階の理論とするとき、任意の論理式 $\varphi$ について $T_\varphi := (\Omega, \Pi_\varphi, \Phi \cup \{\ \psi_\varphi\ \})$ は定理保存拡大である。それだけでなく、任意の $T_\varphi$ の定理 $\phi$ に対して

$$T' \models \phi \leftrightarrow \phi^0 \quad \text{かつ} \quad \phi^0 \quad \text{は}\ T \quad \text{の定理}$$

であるような $\phi^0 \in \mathrm{P}_{\Omega,\ \Pi}[Var]$ が存在する。

**例：ペアノ理論の続き** アリティ2 の新しい述語記号 $<, \leq$ を次の公理と共に追加して、大小関係について簡潔に表現できるようになる。

$$\begin{aligned} x < y &\leftrightarrow \exists z (x + Sz = y) \\ x \leq y &\leftrightarrow x < y \vee x \doteq y \end{aligned}$$

**新作用素記号の導入による拡大** $T = (\Omega, \Pi, \Phi)$ を１階の理論とする。ある論理式 $\phi$ が

- $FV(\phi) \subset \{\ y, x_1, \cdots, x_n\ \}$
- $T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists 1\ y \phi$

を満たすとする。ただし

$$\exists 1\ y\phi \equiv\ \exists\ y\phi\ \wedge (\forall u \forall v\, (\phi[u/y] \wedge \phi[v/y] \to u \doteq v))\,.$$

$(u, v \notin \mathrm{FV}(\phi))$. このとき、新しいアリティ $n$ の作用素記号 $f$ を選び、$\tilde{\Omega} = \Omega \cup \{\ f\ \}$ とおき 、また論理式

$$(y \doteq f x_1 \cdots x_n) \leftrightarrow \phi$$

を $\tilde{\phi}$ と書く。

**定理 2.16** *(i)*　$T$ の拡大　$\tilde{T} := (\tilde{\Omega}, \Pi, \Phi \cup \{\ \tilde{\phi}\ \})$ は定理保存拡大である。

*(ii)*　$\tilde{T}$ の任意の論理式 $\varphi$ について、

$$\Phi, \tilde{\phi} \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$$

を満たす $\varphi' \in \mathrm{P}_{\Omega,\ \Pi}[Var]$ が存在する。$\varphi$ が定理ならば、$\varphi'$ は $T$ の定理となる。

Skolem **関数**　一般に $\forall y_1 \cdots \forall y_n \exists x[\varphi]$ が定理であるとき、アリティ$n$ の関数記号 $f$ を追加し、論理式

$$\forall y_1 \cdots \forall y_n \varphi[f y_1 \cdots y_n / x]$$

を公理に追加して定理保存拡大することができる。しかし、定理 4.3.9 の後半は成り立たない。このような関数を論理式 $\forall y_1 \cdots \forall y_n \exists x[\varphi]$ の Skolem 関数という。

## 2.5 公理論的集合論

### 2.5.1. 集合論の言語

**集合論の言語**　$(\emptyset, \{\in\})$ が集合論を語る言語である、ただし、$\in$ のアリティは 2 とする。$\in$ には中置記法を用いる。$Var$を変数の「集まり」とする。原始論理式は $x \doteq y$ または $x \in y$ （$x, y$ は変数）である。

**定義による述語記号の導入**　アリティ2 の述語記号を次のように導入する：

(2.5.1.1) $$x \notin y \ \equiv \neg(x \in y)$$
(2.5.1.2) $$x \subset y \ \equiv \forall u[\ u \in x \rightarrow u \in y]$$

**省略記号**　中置記法をする関係記号 $R$ に対して

(2.5.1.3) $$\forall xRy[\varphi] \ \equiv \forall x[xRy \rightarrow \varphi]$$
(2.5.1.4) $$\exists xRy[\varphi] \ \equiv \exists x[xRy \wedge \varphi]$$

明らかに

(2.5.1.5) $$\models \exists xRy[\varphi] \leftrightarrow \neg \forall xRy[\neg\varphi]$$

である。よく使う例は

(2.5.1.6) $$\forall x \in y[\varphi] \ \equiv \forall x[x \in y \rightarrow \varphi]$$
(2.5.1.7) $$\forall x \subset y[\varphi] \ \equiv \forall x[x \subset y \rightarrow \varphi]$$

### 2.5.2. クラス

**クラスの概念**　論理式 $\varphi = \varphi(x)$ に対して、$\varphi(x)$ を満たす $x$ の集まりを**便宜上**考えることにし、これを**論理式 $\varphi$ が定めるクラス**といい、$\{\ x \mid \varphi\ \}$ と書く。さらに、

(2.5.2.1) $$y \in \{\ x \mid \varphi\ \} \equiv \varphi[y/x]$$

という書き方を導入する。

より一般的に、$FV(\varphi) \subset \{\ x, y_1, \cdots, y_m\ \}$ のときも、クラス $\{\ x \mid \varphi\ \}$ を考え、$y_i$ 達はこのクラスのパラメータであるという。

クラスは太字で $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$ のように表す。

**クラスの間の関係**　同じパラメータ $y_1, \cdots, y_m$ を持つクラス $\mathbf{A}_i = \{\ u_i \mid \varphi_i\ \}$ に対して

(2.5.2.2) $$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \ &\equiv \forall x[\ x \in \mathbf{A}_1 \leftrightarrow x \in \mathbf{A}_2\ ] \\ &\equiv \forall x[\ \varphi_1[x/u_1] \leftrightarrow \varphi_2[x/u_2]\ ]\end{aligned}$$
(2.5.2.3) $$\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2 \ \equiv \forall x[\ x \in \mathbf{A}_1 \rightarrow x \in \mathbf{A}_2\ ]$$

**集合とクラス**　論理式$\varphi \equiv y \in x$ に対応する（$y$ をパラメータとする）クラス $\{\ x \mid x \in y\ \}$ を $[y]$ 、あるいは紛れがないときは単に $x$ と書く。$\exists x[\mathbf{A} = [x]]$ であるときクラス $\mathbf{A}$ は**小さい** (small)、あるいは、**集合である**という。すなわち、クラス $\{\ x \mid \varphi\ \}$ が小さいとは、

$$\exists y \forall x[x \in y \leftrightarrow \varphi(x)]$$

が成り立つことをいう。集合でないクラスは**大きい** (proper) という。

**大きいクラスの例**　$\mathbf{V} := \{\, x \mid x \doteq x \,\}, \{\, x \mid x \notin x \,\}$ は大きいクラスである。

**クラスの演算**　$\mathbf{A}_i \equiv \{\, u_i \mid \varphi_i \,\}$ $(i = 1,\ 2)$ をクラスとする。

(2.5.2.4) $$\mathbf{A}_1 \bigcap \mathbf{A}_2 \equiv \{\, x \mid x \in \mathbf{A}_1 \ \wedge x \in \mathbf{A}_2 \,\}$$

と定義する。従って

$$x \in \mathbf{A}_1 \bigcap \mathbf{A}_2 \equiv \varphi_1[x/u_1] \wedge \varphi_2[x/u_2].$$

同様に

(2.5.2.5) $$\mathbf{A}_1 \bigcup \mathbf{A}_2 \equiv \{\, x \mid x \in \mathbf{A}_1 \ \vee x \in \mathbf{A}_2 \,\}.$$

またクラス $\mathbf{A} = \{\, u \mid \varphi \,\}$ に対して、

(2.5.2.6) $$\wp(\mathbf{A}) \ \equiv \{\, x \mid x \subset \mathbf{A} \,\},$$
(2.5.2.7) $$\bigcup \mathbf{A} \ \equiv \{\, x \mid \exists y \in \mathbf{A}[x \in y] \,\},$$
$n$(2.5.2.8) $$\bigcap \mathbf{A} \ \equiv \{\, x \mid \forall y \in \mathbf{A}[x \in y] \,\},$$
(2.5.2.9) $$\{\, a, b \,\} \ \equiv \{\, x \mid x \doteq a \vee x \doteq b \,\}$$

とおく。定義から

(2.5.2.10) $$x \in \wp(\mathbf{A}) \ \equiv \forall w[\ w \in x \to \varphi[w/u]\ ],$$
(2.5.2.11) $$x \in \bigcup \mathbf{A} \ \equiv \exists y[\varphi[y/u] \wedge x \in y],$$
(2.5.2.12) $$x \in \bigcap \mathbf{A} \ \equiv \forall y[\varphi[y/u] \to x \in y].$$

また、$\{\, a, b \,\}$ はパラメータ $a, b$ を含むクラスである。

Zermero-Frenkel **の公理系**

**1** 外延性公理

**2** 内包性公理

**3a** 対集合公理

**3b** 和集合公理

**3c** べき集合公理

**4** 収集公理

**5** 無限公理

**6** 選択公理

### 2.5.3. 集合論の公理 1,2,3

**外延性公理**

(ZF$_1$) $$[x] = [y] \to x \doteq y.$$

すなわち、

(2.5.3.1) $$\forall u[u \in x \leftrightarrow u \in y] \to x \doteq y.$$

**内包性公理** (ZF$_2$) クラス $\mathbf{M}$ と集合 $x$ に対して、$[x] \cap \mathbf{M}$ は集合である。

**差集合** これより明らかに、次が成り立つ。

**定理 2.17** 集合 $x$ とクラス $\mathbf{M}$ に対して、$x \setminus \mathbf{M} := \{ y \mid y \in x \wedge y \notin \mathbf{M} \}$ は集合である。

**対集合公理**

(ZF$_{3a}$) クラス $\{ x, y \}$ は小さい。

すなわち

$$\exists z \forall u[u \in z \leftrightarrow u \doteq x \vee u \doteq y].$$

**注意** ZF$_1$ により

$$\models \exists^1 z \forall u[u \in z \leftrightarrow u \doteq x \vee u \doteq y].$$

従って、定理 [2.16] によりアリティ2 の作用素記号 $f$ を導入し、

$$u \in fxy \leftrightarrow u \doteq x \vee u \doteq y,$$

を公理として定理保存拡大することができる。この $fxy$ を クラスの方の表記 $\{ x, y \}$ を用いて表示することにする。従って、この作用素についての公理は

$$u \in \{ x, y \} \leftrightarrow u \doteq x \vee u \doteq y,$$

である。

**順序対** アリティ2 の新しい作用素記号 $\langle x, y \rangle$ を

(2.5.3.2) $$\langle x, y \rangle \equiv \{ \{ x \}, \{ x, y \} \}$$

で定義する。

**定理 2.18**

$$\langle x, y \rangle \doteq < u, v > \leftrightarrow x \doteq u \ \wedge \ y \doteq v.$$

**和集合公理**

(ZF$_{3b}$) $\bigcup[x]$ は集合である。

これにより、アリティ1 の作用素記号 $\bigcup$ を導入し、

(2.5.3.3) $$x \in \bigcup y \leftrightarrow \exists u \in y[x \in u],$$

を公理につけ加える。

**定理 2.19 共通集合定理.** $\bigcap[x]$ は集合である。これを $\bigcup x$ とかく。

**べき集合公理**

(ZF$_{3c}$) $\wp(x)$ は集合である。

これにより、アリティ1 の作用素記号 $\wp$ を導入し、

(2.5.3.4) $x \in \wp(y) \leftrightarrow x \subset y,$

を公理につけ加える。

**直積クラス** クラス $\mathbf{M}_i$ $(i = 1,\ 2)$ に対して、クラス

$$\{\ z \mid \exists a \in xb \in y[z \doteq \langle a, b\rangle]\ \}$$

を $\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$ と書く。

**直積集合** 集合 $x, y$ に対して、

$$[x] \times [y] \subset \wp(\wp(x \cup y))$$

であるから、内包性公理より このクラスは集合となる。これを $x \times y$ と書く。

**注意** この定理により、アリティ2 の作用素記号 $\times$ が公理

$$z \in a \times b \leftrightarrow \exists x \exists y[z \doteq \langle x, y\rangle]x \in a\ \wedge\ y \in b$$

とともに導入される。

**リスト**

各自然数 $n \geq 2$ に対してアリティ $n$ の作用素記号 $f_n$ を公理（定義式）

(2.5.3.5) $f_{n+1}x_1 \cdots x_{n+1} \doteq \langle x_1, f_n x_2 \cdots x_{n+1}\rangle \quad (n \geq 2)$

と定義し、$f_n x_1, \cdots, x_n$ を $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ と記す。

**クラスの族の直積** クラス $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して

(2.5.3.6) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \equiv \{\ z \mid \exists a_1 \in \mathbf{A}_1 \ldots \exists a_n \in \mathbf{A}_n[z =< a_1, \cdots, a_n >]\ \}$

と定義する。べき集合公理より $\prod_i [x_i]$ は集合となる。

### 2.5.4. 関係クラス

**関係クラスの概念**　$\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ の部分クラスを**関係クラス**という。$\mathbf{R}$ が関係クラスのとき $\langle x,y\rangle\in\mathbf{R}$ を $x\mathbf{R}y$ とも書く。

**関係クラスの定義域と値域**　関係クラス $\mathbf{R}$ とクラス $\mathbf{A}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathbf{RA} &\equiv \{\, y \mid \exists x\in\mathbf{A}[x\mathbf{R}y]\,\}\\ \mathbf{Domain}(\mathbf{R}) &\equiv \{\, x \mid \exists y[x\mathbf{R}y]\,\} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{V},\\ \mathbf{Range}(\mathbf{R}) &\equiv \{\, y \mid \exists x[x\mathbf{R}y]\,\} = \mathbf{RV}\end{aligned}$$

**関係クラスの逆と合成**　$\mathbf{R},\mathbf{R}_i$ $(i=1,\ 2)$ に対して逆と合成を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{-1} &:= \{\,\langle x,y\rangle \mid y\mathbf{R}x\,\},\\ \mathbf{R}_1\ \circ\ \mathbf{R}_2 &= \{\,\langle x,z\rangle \mid \exists y[x\mathbf{R}_1y\ \wedge\ y\mathbf{R}_2z]\,\}\end{aligned}$$

**写像クラス**　関係クラス $\mathbf{F}$ が

(2.5.4.1) $$x\mathbf{F}y\wedge x\mathbf{F}z\to y\doteq z$$

を満たすとき、$\mathbf{F}$ は**写像クラス**であるという。

写像クラス $\mathbf{F}$ に対しては

$$\mathbf{F}(x)\ \equiv\ \{\,u \mid x\mathbf{F}u\,\} = \mathbf{F}\{\,x\,\}$$

とおく。小さい写像クラス、$(\subset\mathbf{V}\times\mathbf{V})$ を単に写像という。

### 2.5.5. 収集公理

**収集公理**　任意の関係クラス $\mathbf{R}$ に対して、

$(\mathrm{ZF}_4)$ $$a\subset\mathbf{Range}(\mathbf{R})\to\exists b[a\subset\mathbf{R}b]$$

**定理 2.20 像集合定理** $\mathbf{F}$ が写像クラスのとき、$x$ が集合ならば $\mathbf{F}x$ も集合となる。

### 2.5.6. 無限公理

**空クラス**

(2.5.6.1) $$\emptyset\equiv\{\,x \mid x\neq x\,\}$$

とおく。

**無限公理**　$x^+ := \{\,x,\{\,x\,\}\,\}$ とおくとき

$(\mathrm{ZF}_5)$ $$\exists y[\emptyset\in y\ \wedge\ \forall u\in y[u^+\in y]]$$

ここで、$\emptyset\in y$ は $\exists w[\forall v[v\notin w]\wedge w\in y]$ の略記である。この公理から　$\emptyset$ が集合であることがわかる。これを空集合というこの公理によりはじめて、集合が存在することが保証された。

**公理のまとめ**

**1:外延性公理** $[x]=[y]$ ならば $x\doteq y$.

**2:内包性公理** クラス $\mathbf{M}$ と集合 $x$ に対して、$[x] \cap \mathbf{M}$ は集合である。

**3a:対集合公理** クラス$\{\, x, y \,\}$ は集合である。

**3b:和集合公理** $\bigcup[x]$ は集合である。

**3c:べき集合公理** $\wp(x)$ は集合である。

**4:収集公理** 任意の関係クラス $\mathbf{R}$ と $\mathbf{Range}(\mathbf{R})$ の部分集合 $x$ に対して、$x \subset \mathbf{R}(y)$ を満たす集合 $y$ が存在する。

**5:無限公理** 空集合を含み、さらに集合 $x$ を含むならば $x^+$ も含むような集合が存在する。

**6:選択公** 任意の集合上に整列順序が存在する。

**WF:正規性公理** 関係クラス $\in$ は有基的関係である。

**AFA:非有基性公理** 任意の集合方程式系はただ一つの解を持つ。

公理 1–5 を $\mathrm{ZF}^-$と書き、これに選択公理をつけ加えたものを $\mathrm{ZFC}^-$と書く。非有基性公理を非有基性公理と書く。公理 1–6 に正規性公理をつけ加えたものは公理論的集合論の最もスタンダードな公理系で、これを ZFC と書く。

### 2.5.7. ZFC 公理系

**正規性公理**　Zermero-Fraenkel の公理系には普通次の公理を含める：

$\mathrm{ZF}_{WF}$　　関係クラス $\{\, \langle x, y \rangle \mid x \in y \,\}$ は有基的である,

すなわち、任意の集合 $x$ には、$y \cap x = \emptyset$ を満たすような元 $y \in x$ が存在する。この節では以下 ZFC を仮定する。

**非有基的集合の非存在**　正規性公理を仮定すると $x \in x$ を満たすような集合は存在しない：そのような集合 $x$ が存在する。集合 $y := \{\, x \,\}$ の唯一の元 $x$ は $x \cap y = y \neq \emptyset$ を満たすので正規性公理に反する。

# 3 非有基的集合論概説

## 3.1 非有基性公理

### 3.1.1. グラフの飾り付け

$$\mathrm{graph}(x) := \exists g \exists e [x \doteq \langle g, e\rangle \wedge e \subset g \times g].$$

とおく。$\vdash \mathrm{graph}(x)$ のとき $x$ はグラフであるという。このとき $x = \langle v(x), e(x)\rangle$ とかく（Skolem 関数！）。

$$\begin{aligned}\mathrm{decoration}(f, x) := {} & \mathrm{graph}(x) \wedge f \text{ は写像} \\ & \wedge \mathbf{Domain}(f) \doteq v(x) \wedge \\ & \forall a \in v(x) \forall b [b \in f(x) \leftrightarrow \exists a' [\langle a, a'\rangle \in e(v) \wedge b \doteq f(a')]\end{aligned}$$

と定義する。グラフ $x$ に対して、 $\mathrm{decoration}(f, x)$ を満たす $f$ を $x$ の**飾り付け** という。

**3.1.2. 非有基性公理 (AFA:Anti-Foundation Axiom)** 任意のグラフはただ一つの飾り付けを持つ。すなわち

$$\forall x [\mathrm{graph}(x) \rightarrow \exists^1 f [\mathrm{decoration}(f, x)]].$$

## 3.2 非有基性公理の無矛盾性

### 3.2.1. システムとシステム準同型

**システム** クラス $\mathbf{M}$ とその上の関係クラス $\mathbf{E} \in \mathbf{M} \times \mathbf{M}$ の組が $\mathbf{E}a \in \mathbf{V}$ を満たすとき、組 $M = \langle \mathbf{M},\ \mathbf{E} \rangle$ を**システム**という。$a\mathbf{E}b$ であることを $a \rightharpoonup_M b$, あるいは単に $a \rightharpoonup b$ と書く。また

$$a_M := \{\, b \mid a \rightharpoonup_M b \,\}$$

と書く。

**例** $\mathbf{M}$ が集合ならば、システムは単にグラフのことである。

**例** $\mathbf{M} = \mathbf{V}$ の上には $a \rightharpoonup b \equiv b \in a$ というシステム構造が入る。以下 $\mathbf{V}$ はこれによりシステムとみなす。

**システム準同型** $M_i = \langle \mathbf{M}_i, \mathbf{E}_i \rangle$ $(i = 1,\ 2)$ がシステムの時、写像クラス $\pi : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ が**システム準同型**であるとは、

$$(\pi\ a)_{M_2} = \pi_*(a_{M_1}) \quad (\forall a \in \mathbf{M}_1) \tag{3.2.1.1}$$

を満たすことをいう。

グラフからシステム $M$ へのシステム準同型をグラフ上の $M-$飾り付けという。$\mathbf{V}-$飾り付けは、飾り付けに他ならない。

**システムの定める** apg $M = \langle \mathbf{M}, \mathbf{E} \rangle$ をシステムとし、$a \in \mathbf{M}$ とする。このとき、自然数集合についての再帰定理により

$$Ma := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}^n \{\, a \,\}$$

は集合となる。更に $E_a \equiv \mathbf{E} \cap Ma \times Ma$ とおくことにより apg $(Ma, E_a, a)$ を得る。これを単に $Ma$ とかく。

### 3.2.2. 完全システムと充足システム

**完全システム** システム $M = \langle \mathbf{M}, \mathbf{E} \rangle$ が**完全** (complete) **である**とは、任意のグラフ $G$ に対して $G$ から $\mathbf{M}$ へのただ一つのシステム準同型が存在することをいう。

**充足システム** システム $M = \langle \mathbf{M}, \mathbf{E} \rangle$ が**充足している** (full **である**) とは、$a \mapsto a_M$ が同型写像クラス $\mathbf{M} \to \wp(\mathbf{M})$ を与えることである。すなわち任意の部分集合 $x \subset \mathbf{M}$ に対して $a_M = x$ をみたす $a \in \mathbf{M}$ がただ一つ存在することをいう。

**定理 3.1** 完全なシステムは充足している。

### 3.2.3. 完全システムの構成

**システム内の双模倣関係** $M$ をシステムとする。$M$ 上の関係クラス $\mathbf{R} \subset M \times M$ が**双模倣** (bisimulation) であるとは、任意の $(x, y) \in \mathbf{R}$ に対して

$$x_M \subset \mathbf{R}^{-1}\, y_M$$
$$y_M \subset \mathbf{R}\, x_M$$

が成り立つことをいう。

**命題 3.2** $\mathbf{R}_i\ (i=1,\ 2)$ が双模倣ならば、 $\mathbf{R}_1\cup\mathbf{R}_2,\ \mathbf{R}_1\circ\mathbf{R}_2,\ \mathbf{R}_1^{-1}$ も双模倣である。

**最大双模倣関係** システム $M$ に対して

$$\equiv_M := \bigcup_{\mathbf{R}\text{ は } M \text{ の双模倣}} \mathbf{R}$$

とおく。これは明らかに $M$ 上の双模倣関係クラスであり、しかも包含関係について最大である。また命題 3.2により、これは同値関係クラスとなっている。

**定理 3.3** *(**最大双模倣関係による商システムの存在**)* 任意のシステム $M$ に対して商システム $M/\equiv_M$ が存在する。すなわち、次の条件を満たすようなシステム $M'$ とシステム準同型 $\pi : M \to M'$ が存在する：

*(i)* $\pi M = M'$,

*(ii)* $\pi x = \pi y \Leftrightarrow x \equiv_M y.$

apg **のシステム** apg の成すクラスを $\mathbf{V}_0$ とする。すなわち、$\mathbf{V}_0 \equiv \{\ x \mid \mathrm{apg}(x)\ \}$、ただし、

$$\begin{aligned}\mathrm{apg}(x)\ \equiv\ & \exists v \exists e \exists p[g=\langle v,e,p\rangle \\ & \wedge e \subset v\times v \\ & \wedge p\in v \\ & \wedge \forall x\in v[\langle p,x\rangle \in e^*]].\end{aligned}$$

ここで $e^*$ は再帰的に定義される集合 $\cup_{n=0}^{\infty} e^n$ を表す。$g$ が $\mathrm{apg}(g)$ を満たすとき $g=\langle v(g),e(g),p(g)\rangle$ と書く。

$\mathbf{V}_0$ 上のシステム構造を、

$$\begin{aligned} g \rightharpoonup h\ \equiv\ & (v(g)\supset v(h)) \\ & \wedge (\langle p(g),p(h)\rangle \in e(g)) \end{aligned}$$

と定める。

**定理 3.4** *(**完全システムの構成.**)* $\mathbf{V}_0$ を最大双模倣関係で割ったシステム $\mathbf{V}_c$ は完全である。

### 3.2.4. 無矛盾性の証明

**定理 3.5** *([Rieger])*$M=\langle \mathbf{M},\mathbf{E}\rangle$ が充足システムのとき、$\mathbf{M}$ 上の $(\emptyset,\{\in\})-$ 構造を、

(3.2.4.1) $$x \in_M y \equiv x \in y_M$$

により定義すると、ZFC- が $\mathbf{M}$ で成り立つ。

**定理 3.6** *(**Aczel:非有基性公理の無矛盾性.**)*$M$ が完全システムのとき、ZFC- と 非有基性公理 が成り立つ。ただし

$$\text{非有基性公理} \equiv \forall G[G \text{ はグラフ } \to \exists^1 \varphi[\varphi \text{ は } G \text{ の飾り付け}]].$$

とくに ZF$^-$が無矛盾ならば ZFC$^-$+AFA は無矛盾である。

## 3.3 集合方程式系とその解

### 3.3.1. $X-$集合

**変数を含む集合** $X$ が変数の集まりであるとき $X$ の元を**原素** (Urelements) として集合を構成することができる。この集合を $X-$集合という。原素は集合の元とはなるが自分自身は集合ではないので元を持たない。原素を含まない集合を**純集合**という。

$X-$集合の全体のクラスを $\mathbf{V}[X]$ と書く。純集合全体のクラスは $\mathbf{V}$ になる。

**原素の公理** 原素から出発する集合論の公理的な取扱いは、新しいアリティ1の述語 $U$ を導入し、ZF の公理を少し修正することでできるが、詳しいことはここでは省略する。

公理の例としては

**0:原素公理** $U(u) \to x \notin u.$

**1:外延性公理**

$$(\neg Ux \ \wedge \ \neg Uy) \to (([x] = [y]) \to x \doteq y).$$

**例** $x, x_i \in X \ (i = 1, 2, 3, \ldots)$ のとき、$\{\ x_1, x_2, x_3\ \}, \{\ \{\ x_1\ \}, x_2\ \}$ などは $X-$集合である。

しかし $x_1 \times x_2, \cup x, \cap x, \wp(x)$ などは $X-$集合ではない。なぜならば、これらの作用素は $x, x_1, x_2$ などが元を含む場合にしか定義されないからである。

### 3.3.2. 集合方程式系

**代入定理** $\pi : X \to \mathbf{V}$ を写像クラスとする。このとき以下の性質を持つ**代入写像**$\pi_* : \mathbf{V}[X] \to \mathbf{V}$ が定義される：

$$\pi_* a = \{\ \pi_* b \mid b \in a \setminus X\ \} \cup \{\ \pi x \mid x \in X \ \cap \ a\ \}.$$

**定理 3.7 集合方程式の解の存在と一意性.**$\alpha : X \to \mathbf{V}[X]$ を写像クラスとする。このとき

$$\pi x = \pi_* \alpha(x) \quad (\forall x \in X)$$

を満たす写像クラス $\pi : X \to \mathbf{V}$ がただ一つ存在する。

**集合方程式の例**

(1) $$x = \{\ x\ \},$$
(2) $$x = \{\ x, \{\ x\ \}\ \},$$
(3) $$x = \langle x, x\rangle = \{\ x\ \},$$
(4) $$x = \langle x, y\rangle,\ y = \langle y, x\rangle$$
(5) $$x = \langle 0, y\rangle,\ y = \langle 1, x\rangle$$

(1) の解は明らかに (2) の解にもなっている。また (3) の解を $z$ とすると $x = z, y = z$ は (4) の解になっている。

(5) の解 $x, y$は

$$x = \langle 0, 1, 0, 1, x\rangle,\ y = \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, y\rangle$$

などを満たす。

**3.3.3. クラス方程式**　$x = x \times x$ は集合方程式ではない。しかしクラスのレベルでは

$$X = X \times X$$
$$X = \wp(X \times X \times A)$$

などの方程式を考えることができる。

## 3.4 集合的クラス作用素の最大固定点

### 3.4.1. 集合的クラス作用素

**定義** 写像クラス $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ はクラスにクラスを対応させる作用素 $\mathbf{X}\mapsto\Phi_{\mathbf{F}}\mathbf{X}$ を

$$\Phi_{\mathbf{F}}\mathbf{X} := \bigcup_{x\subset\mathbf{X}} \mathbf{F}x$$

により定める。これを**集合的クラス作用素**という。$\mathbf{F}$ が増大的, すなわち,

$$x\subset y \Longrightarrow \mathbf{F}x\subset\mathbf{F}y$$

ならば、$\Phi_{\mathbf{F}}x=\mathbf{F}x$ である。

**例**. 以下の例で $\Phi_i := \Phi_{\mathbf{F}_i}$ と書く。

1. $\mathbf{F}_1(x) := \wp(x)$. このとき $\Phi_1\mathbf{X} := \wp(\mathbf{X})$.
2. $\mathbf{F}_2(x) := x\times x\times a$ (ただし $a$ は集合). このとき $\Phi_2\mathbf{X} := \mathbf{X}\times\mathbf{X}\times a$.
3. $\mathbf{F}_3(x) := \mathrm{Map}(a,x)$. このとき$\Phi_3\mathbf{X} := \mathrm{Map}(a,\mathbf{X})$.
4. $\mathbf{F}_4(x) := \bigcup_{z,w\subset x}\mathrm{Map}(x,w)$. このとき

$$\Phi_4\mathbf{X} := \mathrm{PMap}(\mathbf{X},\mathbf{X}) := \{\ f \mid f \text{ は写像で定義域も値域も } \mathbf{X} \text{ の部分集合}\ \}$$

.

5. 作用素型 $\Omega$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi_\Omega\mathbf{X} &:= \bigcup_{i=0}^{\infty}\Omega_n\times\mathbf{X}^n\\ &= \{\ \langle\omega,x_1,\cdots,x_n\rangle \mid \omega\in\Omega_n,\ x_i\in\mathbf{X}\ \}\end{aligned}$$

**命題 3.8** クラス作用素 $X\mapsto\Phi X$ が集合的であるための必要十分条件は、単調（$\mathbf{X}\subset\mathbf{Y}\to\Phi\mathbf{X}\subset\Phi\mathbf{Y}$）であり、しかも

$$a\in\Phi\mathbf{X}\ \Rightarrow\ a\in\Phi x\quad(\exists x\subset\mathbf{X}).$$

**補題 3.9** $\Phi$ が集合的クラス作用素ならば、$x\subset\Phi\mathbf{X}$ のとき、

$$x\subset y\ \wedge\ y\subset\Phi y$$

を満たす $y\subset\mathbf{X}$ が存在する。

**命題 3.10** $\Phi_i$ $(i=1,\ 2)$ が集合的クラス作用素ならば、$\Phi_1\circ\Phi_2$, $\Phi_1\times\Phi_2$,$\Phi_1\coprod\Phi_2$ は集合的クラス作用素である。

### 3.4.2. 最小固定点

集合的なクラス作用素$\Phi$ に対して、

$$I_\Phi := \{\ f(i) \mid (f,\prec,i)\in B\ \}$$

とおく、ただし、$B$ は次のような三組 $(f,\prec,i)$ のなすクラスとする：$f$ は写像、$i\in\mathbf{Domain}(f)$ 、$\prec$ は $\mathbf{Domain}(f)$ 上の有基的関係であり

$$f(j)\in\Phi\{\ f(k)\mid k\prec j\ \}\quad(\forall j\in\mathbf{Domain}(f)).$$

**定理 3.11 最小固定点の存在.**

*(i)* $I_\Phi = \Phi I_\Phi$
*(ii)* $X \supset \Phi X \Longrightarrow X \supset I_\Phi$

**帰納法によるクラスの定義** 上の定理により、クラス $I = I_\Phi$ を次のような言い回しで定義することができる：$I$ は$\Phi(I)$ の元が $I$ に入るような最小のクラスである。これを帰納的定義という。

**例１** たとえば、$\Phi(X) = A \cup (X \times X)$ ならばその最小固定点 $A_*$ は、次の条件を満たす最小クラスとして定義される：$A_* \supset A$ かつ、$x, y \in A_*$ ならば $\langle x, y\rangle \in A_*$。

**例２** $\Phi(\mathbf{X}) = \{\, x^+ \mid x \in \mathbf{X} \,\}$ とするとき、

$$I_\Phi = \omega.$$

**3.4.3. 最大固定点** 集合的なクラス作用素$\Phi$ に対して、

(3.4.3.1) $$J_\Phi := \bigcup \{\, x \mid x \subset \Phi x \,\}$$

とおく。すなわち、

$$J_\Phi = \{\, a \mid \exists x \subset \Phi x [\, a \in x \,] \,\}.$$

**定理 3.12 最大固定点の存在.**

*(i)* $J_\Phi = \Phi J_\Phi$
*(ii)* $X \subset \Phi X \Longrightarrow X \subset J_\Phi$

**系 3.13** 次を満たす空でないクラス $J_i$ $(1 \le i \le 4)$ がある：

$$\begin{aligned} J_1 &= \wp J_1 \\ J_2 &= J_2 \times J_2 \times a \\ J_3 &= \mathrm{Map}(a, J_3) \\ J_4 &= \mathrm{PMap}(J_4, J_4) \end{aligned}$$

**余帰納法によるクラスの定義** 上の定理により、クラス $J = J_\Phi$ を次のような言い回しで定義することができる：$J$ は $\mathbf{X}$ の元が $\Phi(\mathbf{X})$ に入るようなクラス $\mathbf{X}$ の中で最大のクラスである。これを**余帰納的定義**という。

**例** 1 たとえば、$\Phi(X) = A \cup (X \times X)$ ならばその最大固定点 $A^*$ は、その元が $A$ の元であるかあるいは $\langle x, y\rangle$ $(x, y \in A^*)$ と書けるような最大のクラスとして定義される。

**例** 2 $\Omega$ を作用素型とする。$\Phi_\Omega$ の最小固定点は変数集合がない場合の項の全体 $\mathrm{F}_\Omega[\emptyset]$ となる。一方$\Phi_\Omega$ の最大固定点は**木代数** $\mathrm{F}^\infty_\Omega[Var]$ となる。これは、$t \in \mathbf{X}$ ならば $t = \langle \omega, x_1, \cdots, x_n\rangle$ $(\exists \omega \in \Omega_n, x_i \in \mathbf{X}$ を満たすような $\mathbf{X}$ の中で最大のもの。

**注意：非有基性公理との関係** 以上の最小及び最大固定点の存在定理には非有基性公理を必要としないが、最大固定点が空でないことを示すのに非有基性公理が必要なことが多い。

**3.4.4. 多変数クラス作用素族の同時固定点** クラスの族 $\mathcal{X} = \{\, \mathbf{X}_i \mid i \in I \,\}$ にたいしてクラスの族$\{\, \Phi_i \mathcal{X} \mid i \in I \,\}$ を対応させる多変数クラス作用素族 $\{\, \Phi_i \,\}$が集合的であるとは、

$$\Phi_i \mathbf{X}_i = \bigcup_{x_j \subset \mathbf{X}_j} \Phi_i \{\, x_j \mid j \in I \,\} \quad (\forall i \in I) T$$

が成り立つことをいう。

**定理 3.14** 集合的多変数クラス作用素族 $\mathcal{X} \mapsto \{ \Phi_i \mathcal{X} \}$ は最小固定点、最大固定点を持つ。

### 3.4.5. 例

**例１**　$\Phi(X) = X \times A$　($A$ は集合) のとき、$a \in A$ に対して集合方程式

$$x = \langle x, a \rangle$$

の解を $x_a$ とすると、

$$\Phi(\{ x_a \}) = \{ x_a \} \times A \ni \langle x_a, a \rangle = x_a.$$

従って $\{ x_a \} \subset \Phi\{ x_a \}$ となり、$\{ x_a \} \subset J_\Phi$ がわかる。とくに　$J_\Phi \neq \emptyset$ がわかる。しかし明らかに $I_\Phi = \emptyset$ である。

**例２**　$\Phi(X) = \wp(X \times A)$　($A$ は集合) のとき、$a \in A$ に対して集合方程式

$$x = \{ \langle x, a \rangle \}$$

の解を $x_a$ とすると、

$$\Phi(\{ x_a \}) = \wp(\{ x_a \} \times A).$$

ところが、

$$\langle x_a, a \rangle \in \{ x_a \} \times A$$

より $x_a \subset \{ x_a \} \times A$, すなわち $x_a \in \wp(\{ x_a \} \times A)$ である。よって$\{ x_a \} \subset \Phi(\{ x_a \})$。従って $\{ x_a \} \subset J_\Phi$ となる。

**練習問題**

1. $\Phi\mathbf{X} = \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ は集合的クラス作用素であり、その最大固定点は空でないことをしめせ。
2. $\Phi\mathbf{X} = \wp(\mathbf{X}^n \times A)$ の最大固定点 $J$ は空でないことを示せ。

### 3.4.6. 最大固定点に解を持つ集合方程式系

**$\Phi X$-集合**　$\Phi$ を集合的クラス作用素とし、$J_\Phi$ をその最大固定点とする。$X$ を変数の集まりとし、$a$ を $X-$集合とする。$a$ が $\Phi-$**局所的** あるいは$\Phi X-$ **集合である** とは、任意のクラス $B$ と代入 $\tau : X \to B$ に対して、$\hat{\tau} a \in \Phi B$ が成り立つことをいう。

**定理 3.15** （非有基性公理を仮定するとき）各 $x \in X$ に対して、$a_x$ が $\Phi X-$ 集合であるとき、集合方程式系

$$x = a_x \quad (x \in X)$$

の唯一の解 $\pi = \{ b_x \mid x \in X \}$ は、$b_x \in J_\Phi$　$(\forall x)$ を満たす。

**例**　$\Phi\mathbf{X} = \wp(\mathbf{X} \times A)$ とし、$X = \{ x, y \}$ を変数集合とする。このとき$\{ \langle x, a \rangle, \langle y, b \rangle \}$　$(a, b \in A)$ は $\Phi X-$ 集合である。従って

$$\begin{aligned} x &= \{ \langle x, a \rangle, \langle y, b \rangle \} \\ y &= \{ \langle y, a \rangle, \langle x, b \rangle \} \end{aligned}$$

の解は $J_\Phi$ に属する。

## 3.5 最終余代数定理

### 3.5.1. Φ-余代数

**定義**. Φ が**集合的共変クラス函手**であるとは、

1. クラス $\mathbf{X}$ に対してクラス $\Phi\mathbf{X}$ が
2. 写像クラス $f : \mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ に対して写像クラス$\Phi(f) : \Phi\mathbf{X}\to\Phi\mathbf{Y}$ が

が対応づけられていて、

1. $\mathbf{X} \mapsto \Phi\mathbf{X}$ は集合的クラス作用素であり、
2. $\Phi(f \circ g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$ が成立する

ことをいう。

**例**. $\Phi_i$ $(i = 1, 2, 3)$ は共変クラス函手となる：

1. $\Phi_1(f)(\alpha) := \{\ f(x) \mid x \in \alpha\ \}$,
2. $\Phi_2(f)(\alpha) := f \circ \alpha$,
3. $\Phi_3(f)(\alpha) := \wp(\mathrm{id}_A \times \alpha)$.

以下 Φ は集合的共変クラス函手であるとする。

**定義** [Φ-**余代数**]. クラス $A$ と写像クラス $\alpha : A\to\Phi(A)$ の組 $(A, \alpha)$ のことを **Φ-余代数 (Φ-coalgebra)** という。

**例**.

1. $\Phi_1$-余代数はグラフに他ならない。
2. $\Phi_2$-余代数はオートマトンに他ならない。
3. $\Phi_3$-余代数は非決定的オートマトンに他ならない。

**定義**. $(A_i, \alpha_i)$ $(i = 1, 2)$ が Φ-余代数であるとき、$\varphi : (A_1, \alpha_1)\to(A_2, \alpha_2)$ が Φ-準同型であるとは

$$\alpha_1 \circ \varphi = \Phi(\varphi) \circ \alpha_1$$

が成り立つことをいう。

# 4　非有基的集合論の応用

## 4.1　共通知識

### 4.1.1. 知識パズル

**知識についての暫定的記号**

[**agent** ] $P_1, \cdots, P_n$.

[**外的世界の状態空間** ] $E$.

[**世界についての命題（i.e. 情報）**] $A \subset E$.

[$P_i$ **が** $A$ **を知っている** ] $K_i A$.

[$P_i$ **が** $A$ **を知らない** ] $\neg K_i A$.

[$A$ **は共通知識** ] $CA$.

[$P_i$ **は変数** $f$ **の値を知っている** ] $K_i f = \vee_{v \in \mathbf{Range}(f)} K_i(f = v)$.

**知識の性質**　$K_i A \rightarrow A$, すなわち、agent の知識は正しい。

McCarthy's puzzle

[**世界の構造** ] $E = \prod_{i=1}^{2} E_i, \quad E_i = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,

[**変数** ] $x_i : E \to E_i$ (射影),

[**初期共通知識** ]

$$\begin{array}{l} K_1(x_1 x_2) \ \wedge \ K_2(x_1 + x_2) \\ 1 \le x_1, x_2 \le 5 \end{array}$$

次のような経過をたどるとき $x_1 x_2$ はいくつか？

[**1** ] 最初 $\neg K_2(x_1 x_2)$ でありこれを $P_2$ は $P_1$ に告げる。

[**2** ] $\neg K_1(x_1 + x_2)$ である。

Wiseman's puzzle

[**世界の構造** ] $E = \prod_{i=1}^{3} E_i, \quad E_i = \{ 0, 1 \}$,

[**変数** ] $x_i : E \to E_i$ (射影),

[**実際の世界の状態** ] $\wedge x_i = 1$,

[**共通知識** ]

$$\begin{array}{l} \wedge_{i \ne j} K_i x_j, \\ \exists i [x_i = 1], \end{array}$$

[**個別知識** ]

$$K_3 \left( \neg K_2 x_2 \ \wedge \ K_2 \neg K_1 x_1 \right).$$

このとき $K_3 x_3$ となるがなぜか？

boy's hats puzzle

[**世界の構造** ] $E = \prod_{i=1}^{3} E_i, \quad E_i = \{ 0, 1 \}$,

[**変数** ] $x_i : E \to E_i$ (射影),

[**実際の世界の状態** ] $\wedge x_i = 1$,

[**共通知識** ]

$$\begin{array}{l} \wedge_{i < j} K_i x_j, \\ \wedge_{i \ge j} \neg K_i x_j, \\ \exists i [x_i = 1], \end{array}$$

次のように知識が変化するとき $x_i$ の値を求めよ。

[**1** ] $\neg K_1 x_1$ でありこれを公開する。

[**2** ] その後も $\neg K_2 x_2$ でありこれを公開する。

[**3** ] その後 $K_3 x_3$ となる

Muddy Children's Puzzle

[**世界の構造** ] $E = \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad E_i = \{\, 0, 1 \,\}$,

[**変数** ] $x_i : E \to E_i$ (射影),

[**実際の世界の状態** ] ある $\gamma \in E$ に対して$\wedge x_i = \gamma_i$ $(1 \geq i \geq n)$,

[**初期共通知識** ]

$$\wedge_{i \neq j} K_i x_j$$
$$\wedge_i \neg K_i x_i$$

次のプロセスで各 agent の知識が変化する：

[**1** ] 情報 $\exists_i[x_i = 1]$ が公開される。

[**2** ] 次を繰り返す：

- $\phi \equiv \vee_{i=1}^{n} K_i x_i$ ならばこれを公開する、
- $\neg\phi = \wedge_{i=1}^{n} \neg K_i x_i$ ならばこれを公開する.

このとき、$i$ 回目の状況は、$k := |\gamma| :=^{\#} \{\, i \mid \gamma_i = 1 \,\}$ とおくと、

[$1 \geq i < k-1$ **のとき** ] $\neg\phi$,

[$i = k-1$ **のとき** ] $\phi$,

[$i = k$ **のとき** ] $x = \gamma$ は共通知識

となる。

Conway's Problem $|\gamma| > 1$ の場合は情報 $\exists_i[x_i = 1]$ をどの agent も知っているのだが、これが公開されないと、$x = \gamma$ はいつまでも共通知識にはならない。皆が知っていることを公開することによって何が変化したのか？

**答** 「個別の知識が共通知識となった。」

**メタ問題** 以上のパズルの解答の数学的構造を明らかにせよ。

**文献**

[S] Sato,M. A study of Kripke-type Models for Some modal logics by Gentzen's Sequential Method, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 13 (1977), 381-468.

[HM] Knoledge and Common Knowledge in a Distributed Environment, Journal of Asso. Comp. Mach. (1990) 37, 549-587.

[HF] Halpern, J.Y. and Fagin R.: Modelling knowledge and action in distributed systems, Distributed Computing(1989)3, 159-177.

[HV] Halpern J.Y. and Vardi M.Y.:Model Checking vs. Theorem Proving: A Manifesto, in Artificial Intelligence and Mathematical Theory of Computation, papers in Honor of John McCarth, pages 151-176, ed. by V. Lifschitz, Academic Press, 1992.

### 4.1.2. 非有基的集合論による知識モデル

**知識空間と状態空間**　集合 $E$ と自然数 $n>1$ を固定する。$E$ は外的世界の状態空間、$n$ は agent の数を表す。クラス作用素 $\Phi_{n,E}:\mathbf{X}\mapsto\wp(\mathbf{X}^n\times E)$ の最大固定点を $J=J_{n,E}$ とする。$W:=J^n\times E$ の元を $S,S',\ldots$、$J$ の元を $\alpha,\beta,\ldots$ と書く。

$\pi_i:W\to J$ を $i$–成分への射影とし、

$$W_0:=\left\{\ S\mid S\in\bigcap_{i=1}^{n}\pi_iS\ \right\}$$

とおく。クラス作用素

$$\Phi'_{n,E}:\mathbf{X}\mapsto\wp((\mathbf{X}^n\times E)\cap\ W_0)$$

の最大固定点を $\mathbf{S}$ とし、$\mathbf{W}:=(\mathbf{S}^n\times E)\cap W_0$ とおく。

$$\mathbf{S}\ =\wp\mathbf{W}, \tag{4.1.2.1}$$
$$\mathbf{W}\ \subset\mathbf{S}^n\times E. \tag{4.1.2.2}$$

$$\pi_i:\mathbf{W}\to\mathbf{S},\ \pi_E:\mathbf{W}\to E$$

を射影とする。

**知識と情報**　$\mathbf{W}$ の元を**世界の状態**と呼び、$\mathbf{S}=\wp(\mathbf{W})$ の元を**世界についての知識**という。$S=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n,e\rangle$ が世界の状態のとき、$\alpha_i$ を $S$ **における** agent $P_i$ **のもつ知識**という。

情報という概念を、「可能な世界状態の集まり」と解釈し、$\mathbf{W}$ の部分クラス $\mathbf{M}$ を**世界の状態についての情報（または条件）**という。集合である情報が知識にほかならない。$S\in\mathbf{M}$ のとき、**世界の状態が** $S$ **のとき情報** $\mathbf{M}$ **は正しい**といい、$S\models\mathbf{M}$ と書く。

$\alpha\subset\mathbf{M}$ のとき、**知識** $\alpha$ **から情報** $\mathbf{M}$ **の正しいことがわかる**という。agent $P_i$ の持つ知識から情報 $\mathbf{M}$ の正しいことがわかるとき、agent $P_i$ は情報 $\mathbf{M}$ を**知っている** という。

**練習問題**　クラス作用素 $\Phi_{n,E},\Phi'_{n,E}$ は集合的であることを示せ。

**外的世界についての情報**　$A\subset E$ に対して

$$[A]:=\pi_E^{-1}A\subset\mathbf{W}.$$

**他の agent の知識についての情報**　情報 $\mathbf{M}\subset\mathbf{W}$ に対して

$$\mathbf{K}_i\mathbf{M}:=\pi_i^{-1}\wp(\mathbf{M})=\{\ S\mid\pi_iS\subset\mathbf{M}\ \}.$$

$S\models\mathbf{K}_i\mathbf{M}$ は 世界の状態が $S$ のとき agent $P_i$ が情報 $\mathbf{M}$ を知っていることを表す。

**命題**

$$\mathbf{K}_i\mathbf{M}\subset\mathbf{M}.$$

**証明.**　$S\in\mathbf{K}_i\mathbf{M}$ とする。$S\in\pi_iS\subset\mathbf{M}$ より $S\in\mathbf{M}.$ (証終)

写像 $f:E\to V$ に対して

$$\mathbf{K}_if:=\bigcup_{f\in V}\mathbf{K}_i[f=v].$$

**命題**

$$[f=v]\cap\mathbf{K}_if=\mathbf{K}_i(f=v).$$

**証明**.

$$\begin{aligned}[f=v]\cap\mathbf{K}_i f &= [f=v]\cap(\cup_{v'\in V}\mathbf{K}_i[f=v'])\\ &= \cap([f=v]\cap\mathbf{K}_i[f=v'])\\ &= \mathbf{K}_i[f=v]\end{aligned}$$

(証終)

**共通知識**　情報 $\mathbf{M}$ に対して $\mathbf{M}$ が共通知識であるという情報 $\mathbf{CM}$ を次のクラス作用素の最大固定点として定義する：

$$\Phi_{\mathbf{M}}:\mathbf{X}\mapsto\mathbf{M}\bigcap\cap_{i=1}^{n}\mathbf{K}_i\mathbf{X}.$$

**練習問題**　$\Phi_{\mathbf{M}}$ が集合的であることを示せ。

**公開化作用素**　情報 $\mathbf{M}$ に対して、これが公開されることによりもたらされる世界状態の変化を表現する**公開作用素**$\kappa[\mathbf{M}]:\mathbf{W}\to\mathbf{W}$ を次の性質で定義する：

$$\kappa[\mathbf{M}]S=\begin{cases}\emptyset & \text{if } S\notin\mathbf{M}\\ \langle\kappa[\mathbf{M}]\pi_1 S,\cdots,\kappa[\mathbf{M}]\pi_n S,\pi_E S\rangle & \text{if } S\in\mathbf{M}\end{cases}$$

ただし、$\alpha\in\mathbf{W}$ に対して

$$\kappa[\mathbf{M}]\alpha:=\{\ \kappa[\mathbf{M}]S\mid S\in\alpha\ \}.$$

より正確には、未知変数のクラス $\{\ x_S\mid S\in\mathbf{W}\ \}$ についての次の集合方程式系の解を $x_S=b_S$ とするとき、$\kappa[\mathbf{M}]S:=b_S$ と定義する。

$$x_S=\begin{cases}\emptyset & \text{if } S\notin\mathbf{M}\\ \langle\{\ x_{S'}\mid S'\in\pi_1 S\cap\mathbf{M}\ \},\cdots,\{\ x_{S'}\mid S'\in\pi_n S\cap\mathbf{M}\ \},\pi_E S\rangle & \text{if } S\in\mathbf{M}\end{cases}$$

**4.1.3. Kripke-構造**　知識に関する論理は様相論理の一種で、その伝統的「モデル理論」はKripke-構造による解釈に基づいている (cf. [HV])。この節では、前節で導入したクラス $\mathbf{W}$ が普遍Kripke 構造を与えることを示す。

Kripke–**構造**　$\langle\mathcal{W},\mathcal{K}_1,\cdots,\mathcal{K}_n,\pi_E\rangle$ が $E,n$ Kripke–**構造**であるとは、

- $\pi_E:\mathcal{W}\to E$ は写像クラス,
- $\mathcal{K}_i\subset\mathcal{W}\times\mathcal{W}\quad(i=1,\cdots,n)$,
- $(S,S)\in\mathcal{K}_i\quad(\forall S\in\mathcal{W},\ i=1,\cdots,n)$.

$\Psi$-coalgebra　前節のように

$$\mathbf{W}_0:=\{\ S\in\mathbf{V}^n\times E\mid S\in\cap_{1\le i\le n}\pi_i S\ \}$$

とおき、クラス作用素 $\Psi$ を次のように定める：

$$\Psi\mathbf{X}:=((\wp\mathbf{X})^n\times E)\cap\mathbf{W}_0.$$

$\Psi$-coalgebra とはクラス $\mathcal{W}$ と写像クラス $\alpha:\mathcal{W}\to\Psi\mathcal{W}$ の組 $(\mathcal{W},\alpha)$ のことをいう。

$\Psi$-coalgebra **と** Kripke–**構造の** 1-1 **対応**　Kripke–構造 $\langle\mathcal{W},\mathcal{K}_1,\cdots,\mathcal{K}_n,\pi_E\rangle$ と $\Psi-coalgebra$ とは次により１対１に対応する：

(4.1.3.1) $$\alpha(S):=\langle\mathcal{K}_1\{\ S\ \},\cdots,\mathcal{K}_n\{\ S\ \},\pi_E S\rangle$$

(4.1.3.2) $$\mathcal{K}_i = \{\ \langle S, S' \rangle \mid S' \in \pi_i S\ \}.$$

ただし、

$$\mathcal{K}_i\{\ S\ \} := \{\ S' \mid \langle S, S' \rangle \in \mathcal{K}_i\ \},$$

また、$\pi_i$ は $\alpha$ と第 $i$–成分への射影の合成。

final Ψ-coalgebra　Ψ-coalgebra $(\mathcal{W}, \alpha)$ が final Ψ-coalgebra であるとは、任意の Ψ-coalgebra $(\mathcal{W}', \alpha')$ に対して、写像クラス$\mu : \mathcal{W}' \to \mathcal{W}$ が存在して、

$$\Psi\mu \circ \alpha' = \alpha \circ \mu$$

となることをいう。ただし、$\Psi\mu : \Psi\mathcal{W}' \to \Psi\mathcal{W}$ は $\mu$ の引き起こすクラス写像。

**定理：** special coalgebra theorem　Ψ の最大固定点は final Ψ-coalgebra であり、

$$\mathcal{W} = \mathbf{W} \subset (\wp\mathcal{W})^n \times E$$

で与えられる。ただし **W**は**??** で定義したクラス。