複雑系の数理

高次元圏論序説

北海道大学大学院理学研究科数学専攻
辻下　徹

平成 10 年 3 月 24 日

目 次

0　序

最初に筆者の立場を明確にしておきたい。「複雑系の数理」の最も困難な点は生命や人間や社会を数学的モデルとして切り出す点にある。困難であるが

切り出せるとするのが複雑系の数理科学の大前提である。しかし、生命や人間や社会は（数学的モデルに限らず）形式として切り出した所にはないということは内部観測の視座によって明確になったと私は考えている [5, 14]。

しかし、内部観測の視座は同時に次のことも示している。生命のモデルとして切り出されたものには含まれていない多くのものがモデルを論じるときに蘇る、すなわち、モデル自身の中に生命があるのではなくそのモデルを論じる研究行為の中に生命が現前するということである[1]。この様相を捨象しては生命はどこにもないというのが内部観測のスタンスの小さな帰結である。

この様相の指摘を反科学に導くものと考えることは誤解であり、その誤解を徹底すると今の生命科学はすべて反科学と考えることを帰結する。内部観測のスタンスは逆であり、科学のそういう様相（科学者自身の行為に科学の実質がある [12]）を見つめることが「科学的である」という強い要請から密教性を取り去りその有効性のみを残すことを可能にする、と考える。

しかし以上のことが、数理的に切り出されたものとしての複雑系＝複雑な機構がもつ数理科学的研究テーマとしての重要性を減ずるわけではない。今後やらなければならないこと・やれることはたくさんあると思われる。これは人工知能の強い主張（心は構成できる）が無意味なことが了解されたとしても人工知能という分野がなすべきこと・なせることには限りがないのと同様である。

この小論では筆者は「複雑系＝複雑な機構」という立場に立って、新しい機構記述の概念としての高次元圏論を紹介するが、この枠組は内部観測の視座から自然に要請されるものでもある (cf. §5)。

その前にこの論説のテーマと直接は関係しないが、なぜ「脳の高次機能」が数理的な問題にはならないと考えるかを、簡単に説明しておきたい。

脳を理解しよとするときに脳だけを考えていて済むわけにはいかないことは明らかであろう、一万個のニューロンがどういう挙動をするのかを見ること自体に魅せられているのでなければ。最低限、脳を含む身体全体を考えないと脳の中の生理的プロセスの意味を考えるわけにはいかない。しかし一旦「脳の高次機能」を問題にし始めたら、もはや身体だけでは話しは閉じようがない。その脳を持った人の生活空間・社会的関係だけでなくその人を取り巻く文化・時代がすべて絡んでくる。しかも、身体の場合と異なりこれらは最早数理的な用語では記述できない世界である。一方に数理的（物理的・生理的）な用語でいくらでも精密に記述できる脳があり、他方には自然言語でしか記述できない世界があり、それを両方使って始めて「脳の高次機能」について語ることができるのであり「脳の数理」はありようがない[2]。これは高次

[1] これは人工生命の強い主張（生命は計算機の中に構成できる）が無意味なことを帰結するが、人工生命の研究が無意味なことを帰結するわけでは全くない。人工生命研究で構成されるモデルは生命の本質を表すような類いのものではなく生命を考える契機 [5] を提供するものであるという点さえ明確に意識されている限り、人工生命の研究は生命研究の有効な方法であることは実証済みと思われる。

[2] 「脳の数理」を広義に解釈して数学的モデルを語彙の一つとして高次機能を語ることを指すのであればもちろん可能である。しかし、その場合には序でも述べたように高次機能の本質はそ

機能を問題にしようとするならば数理的な複雑系として切り出した脳（の数理モデル）自身にはないことを示している。

このように、脳や免疫系などを、それだけを切り出して考えることは心や生命を理解しようとする立場からすれば的外れなことではあるが、一方では免疫系や脳のメカニズムだけに注目するとき、それは明確に数理的対象となる性格のものでありながら、そこに生じているプロセスを語る数理的言葉は未だ発達途上にある。例えば、カオス研究で見い出された時空間欠性[3]を持つカオス遍歴 [8] [4]が生じているときに一体どういう事態が成立しているのかという方向の吟味はされていないと思われる。通常は系の自由度が下がっているとみなされる時空間欠性をむしろ高次元のプロセスが発生していると見る見方を高次元圏論が提供する可能性がある。

この小論では高次元プロセスの理論として高次元圏論の紹介を試みる[5]。発展中のテーマであるためにその全容は確定していないので、ここでは高次元セルの図示法の解説を中心にして高次元圏自身については荒い説明にとどめた。[6]

1　高次元圏の必要性

1.1　プロセス合成のプロセス

「複雑な機構」の捉え方に欠かせないものとして、小さな素プロセスを組み合わされて大きなプロセスが作られるという描像がある。しかし素プロセスが組み合わせられていると言う場合には組み合わせている状態を維持している高次のプロセスが潜在していると考えられる。こういった「２次元プロセス」達は、いわば１次元プロセス達を独自のまとめかたをして少し大きな単独の１次元プロセスに仕立てあげる。しかし電子回路の場合とは異なり生体の場合にはこのような２次元プロセスはほんの少しの素プロセスしか組み合わせてたままにしておくことはできないであろう。

２次元プロセス達自身も組み合わせられるがそのときには３次元プロセスが関与する。一つ３次元プロセスの現前により、さらに大きな１次元プロセスが実現する。以下同様にして高次元のプロセスの概念の必要性が生じる。逆に高次元プロセスが一つ消滅するとき、それが実現していた大規模な１次

のモデルを用いて語る研究者の方にあってモデル自身にはないのである。

[3]一時的に局所的に秩序だった挙動が起こる様相．これが普遍的に起こることを起こりかたの分析も含めて指摘するものがカオス遍歴の概念である．

[4]これは、脳における新しい記憶の貯蔵に際して一時的にたまたま発生したコヒーレントな挙動を示すミクロな場所が利用されるというストーリーを生む可能性がある。

[5]平成９年度後期に北大で行った講義 [15] に基づく。

[6]図示法の説明がくどいことを訝る読者がいるかもしれないが、圏論でダイアグラムを用いた議論は不可欠であるのと同様に、高次元圏でもダイアグラムの重要性は極めて大きく、有効な図示法を見出すことが理論の実質的発展の要となると私は考えている。ここで紹介する図示法はこれまでの２セル表示の高次元化や Baez-Dolan の meta-tree 表示 [3] やよりも情報を簡潔に柔軟に精密に表示できるものと思われる [16]。

元プロセスは分解して元の断片的な１次元プロセスの単なる集合に戻ってしまう。

素プロセスが協同して大域的な働きをすることは高次元のプロセスが発生していることにより実現されている、という描像が高次元圏論によって可能になったと私は考えている。この描像の詳細化は今後の研究をまたなければならないが、最低限こういう描像なしに脳や免疫系のような「複雑な機構」を記述するのは無理ではないかと感じている[7]。

1.2 いくつかの誤解

この描像はいくつかの伝統的な描像と混同されやすい。

まず、一見すると階層的描像と違いがないように見える。しかし、どの２次元プロセスが働くかによって１次元プロセスの組織化は変動するのでいわば構造化された階層機構にはなっていない。逆にいうと「動的な階層構造」の明確な記述法を高次元圏論は与えることが期待される。

また、高階のプロセスと混同されやすいが、それとは似て非なるものである。単にプロセスをその記述（コード）と同一視してそれを処理するという考えに高階プロセスの概念は基づいていて、プロセス概念には何の変更も加えられていない。いわば、１次元を０次元に落とすことで自動的に高次元的な様相を実現したものと考えられる。そこでは常に動いている素プロセスが高次のプロセスによって修飾・組織化されるという描像はない。

さらに、高次元プロセスなどという大袈裟なものなしにも普通のプロセスが他のプロセスの挙動を相互作用を通して修飾するということは表現できるではないかという誤解も予想されるが、それは高次元プロセスの構想の主眼は「相互作用」自身もプロセスと同じように明示的な役割を果たすべきだという点にあることを見過ごしている。

2 １次元プロセスの言語：多重圏

2.1 圏

圏論の高度な使い方については他の論説に書かれていると思うので、ここでは圏論の最初の部分について少し初等的な説明をしておきたい。

一つの圏について論じるというときには、まず対象と射と呼ばれる二種類のモノがある。射 f については、$f : A \to B$ と書かれる対象 A, B が定まり、ほかに $g : B \to C$ があると f, g の合成 $f; g : A \to C$ というものが指定されていて (図 1) 結合法則

$$(f; g); h = f; (g; h) \tag{1}$$

[7]同様の考えが [4] にも表明されている。

を満たす。また、それぞれの対象 B には恒等射 $1_B : B \to B$ が備えられて

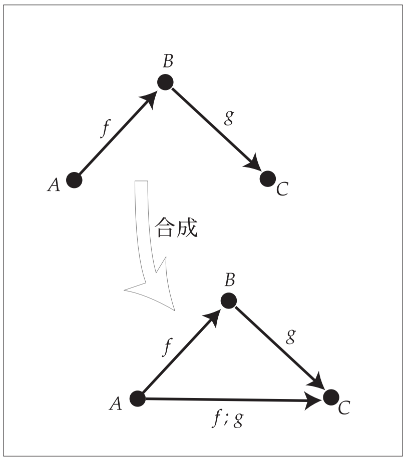

図 1: 通常の合成図

いて他の射と合成しても変化を起こさない：

$$f; 1_B = f \quad 1_B; g = g.$$

さて、$f : A \to B$ という記号の解釈の自由度は驚くほど大きい。数学では、対象は数学的構造で射は構造を保つ写像という解釈が多い（このとき圏は具体的であるという）。しかし圏論の意義はそこに限られていない。

有名な解釈は、命題を対象とし証明を射とするものであり f が 命題 A を仮定して命題 B を導く証明であることを $f : A \to B$ と書く。このとき、証明 $f : A \to B$,$g : B \to C$ の結合は A を仮定して C を導く証明となる。

計算科学の文脈では $f : A \to B$ は、A タイプのデータを B タイプのデータに変換するプロセスと考えるのが原点である。プロセスを射というだけで、その結果だけでなく処理方法まで含めて区別することが可能であり、これはそのような区別にはアドホックな付加構造が必要となる集合論の場合と対照的である。

上の場合には次の描像も有効である。$f : A \to B$ はプロセス f が 2 種類の端子 A^*, B を持ち、B^*, C を端子に持つ他のプロセス g があるとき、これを B, B^* という相補的な端子で結合して新しいプロセス $f; g$ が定義されると考えるのである。この場合は図 1 と同じものが図 2 のように表示される。この表示は長所がある、それは形を変えずに端子数を増やせることである。

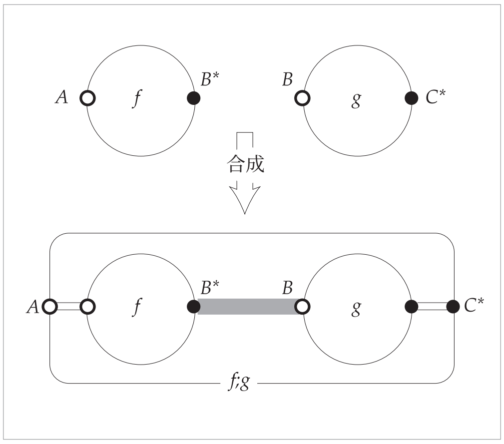

図 2: 射の合成をプロセスの結合と解釈したときに適切な表示. 合成後のプロセス $f;g$ は下の外側の長方形で表示されている。図 1 では合成前の端子を合成後の端子に流用しているが、この図では区別して合成前後の対応をリンク（２本線）で表示している。

2.2　多重圏

圏の入力ポートを任意個数にしたものが多重圏である。射は

$$f : A_1, \cdots, A_n \to B \tag{2}$$

という形で表示されるがこれを図 3 のように記す。ここで重要な点は、図示では端子が二次元的場所という自由度の大きな情報によって区別されるが (2) では一次元的順番によってしか区別できないことである。そのために図示では単純に言ってしまえることが表記 (2) では錯綜した言い方になることが多い。ここではなるべく図示によって説明する。なお蛇足だが図で円形を用いることに必然性があるわけではない。図 4 にあるいずれの図も同じ情報を表示できる。同じタイプの端子が複数ある場合、それらの区別は位置情報により済んでいるが、複数の射を論じるときは端子の間の対応が問題となる。そこで、情報としては冗長であるが図 5 のように端子に名前をつける場合もある。

多重圏における合成　多重圏での合成の仕方は相補的タイプを持つ端子同志を結合の仕方の指定で与えられ、それを図示したものを合成図式 (pasting diagram) という。どの端子をどの端子につなぐかを端子をつないで表示したものを**リンク図**と呼ぶ（図 6)。これは図 1 上相当するもので、図 1 下に相当するものは図 7 のようになる。この図には結合結果である射 k と共に、その入出力端子が、合成前の射のどの端子に対応しているかがリンクで表示されている。この図はかなり冗長なので、肝心な情報だけを取り出すと図 8 の

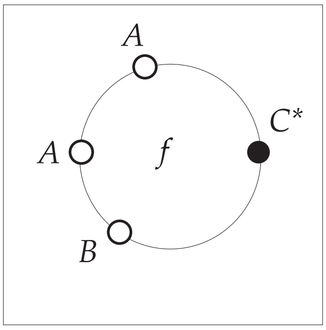

図 3: 多重圏の射．A タイプが二つ B タイプが一つの入力端子と C タイプの出力端子がある．同じタイプの入力端子は場所で区別されている．出力端子をタイプ C^* であるということにより、入出力という概念を消去して記述ができるようになる。

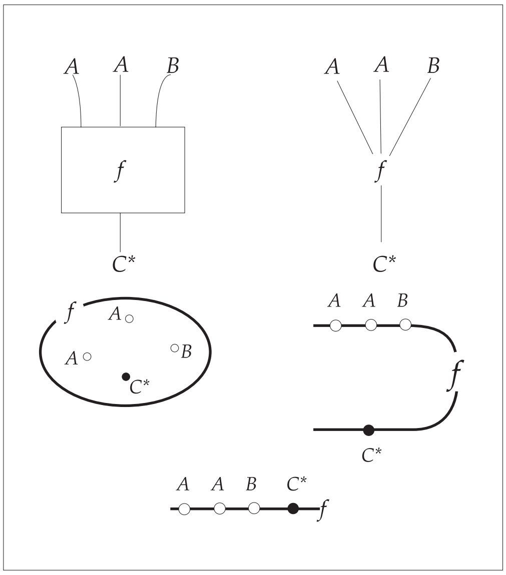

図 4: 多重圏の射の種々の図示： いずれも同じ情報を表示していることは明らかであろう．同じタイプ A の端子が 2 箇所あるので、2 つの射を比べるときは端子の対応を指定しないといけない (図 5) 参照。

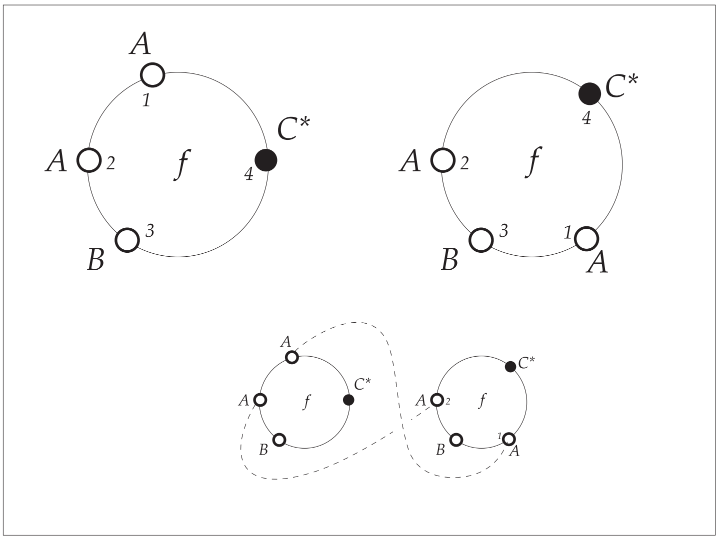

図 5: 同タイプの端子は名前を付けて同定する必要がある場合がある。この図では左右の射は同じものと考えたいが「同じだ」というときに端子の対応を決めなければならないが位置だけでは決まらない。ただし、3, 4 という名前は不要である。同じことは端子に名前を付けなくても、下ように端子の対応を明示的に書き入れればよい。

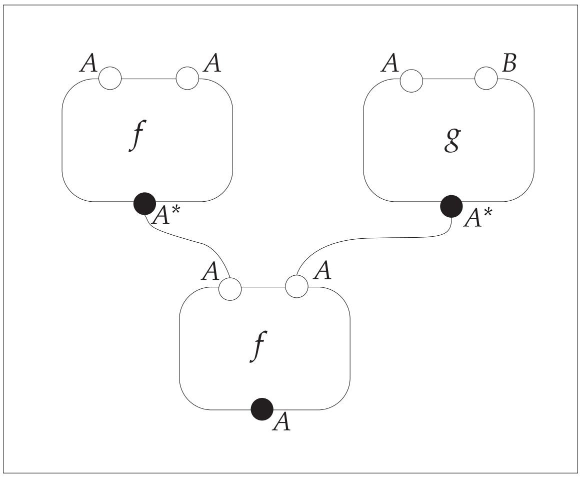

図 6: 多重圏における合成図式 (pasting diagram). ここでは左上の出力端子を下の左の入力端子と繋ぎ、右上の１次元セルの出力端子を下の右の入力端子とつなぐという（当たり前の）結合法を表示している。

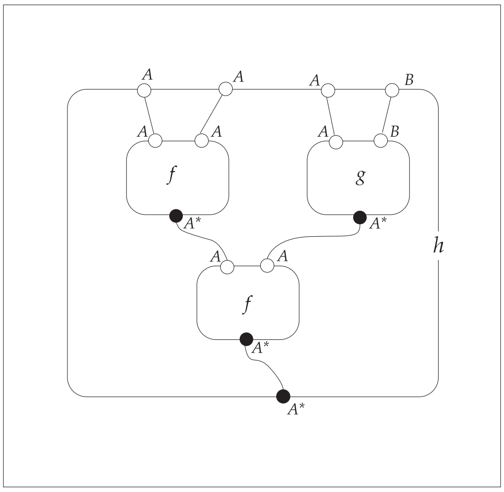

図 7: 多重圏における射の合成の図示．この図では結合図式だけでなく、結合された結果出てくる射 h が描かれている。それだけでなく、h の端子が、合成される射のどの端子から由来するかを、リンクによって記載してある。

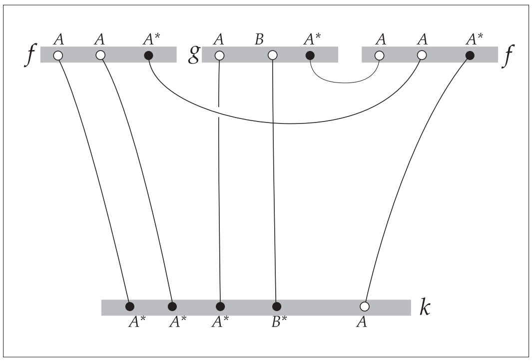

図 8: 多重圏における射の合成指定の簡潔な図. ここでは射は棒で表示され、合成図式は水平方向のリンクで表示され、合成前後の端子の対応が垂直方向のリンクで表示されている。この図は図 7 と同じ情報を持っていることは明らかであろう。

よう書ける。もちろん、これを書く方法はいろいろある。肝心な点は、合成する前の射の相互関係・合成後に出現する射のタイプ・合成前後の射の端子の関係の 3 点が記述されていなければならないことである。他の方法としては、図 9 があるがこの方法では合成前後の関係の記述がアドホックである。

3 高次元セルの表示法

3.1 2次元セルの表示

高次元圏論の萌芽は 2 圏論にある。圏の全体は自然に圏の構造を持つだけでなく、圏を対象（0次元セル)、関手を射（1次元セル）とする圏の構造に加えて、自然変換という 2 次元的な対象（2次元セル）も持っている。これを抽象化したものが 2 圏の概念で圏論の展開には書かせない枠組みとなっている。以下は 2 圏論にあらわれる通常使われている図示法を紹介しそれをリンク図式に書き換える。2 圏では通常の図示が十分有効であるためにリンク図式は必要はないが、3 次元以上のセルの議論を図解するには不可欠と思われることを次節以降説明する。

2次元セルは通常の射（1次元セル）を変形するもの考えて頂きたい。2次元セル

$$\alpha : f \to g : A \to B$$

は、図 10 のように描かれる。実際にはこれを一般化した図 11 も用いる。

この図 11 では射の入力が一つであるという特殊性が使われており多重圏では使えない図示法となっている。そこで、これをリンク図を使って書き直してみると図 12 のようになる。両図を見比べれば、単に 2 つの頂点を共有す

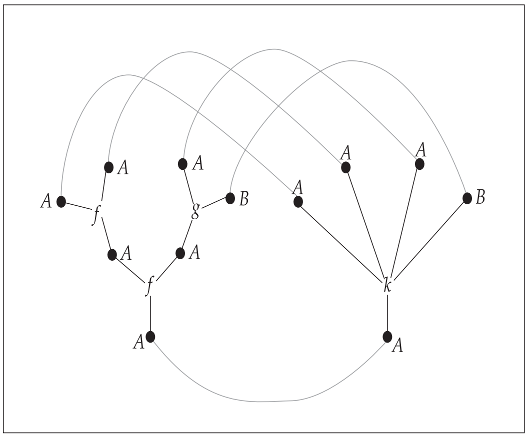

図 9: 多重圏における射の合成の木表示．合成前後の端子の対応はリンクで表示されているのに対し、合成図式は端子の共有によって図示されており、両者の表示法が異なっている。

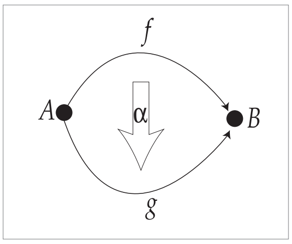

図 10: 2 次元セル $\alpha : f \to g : A \to B$

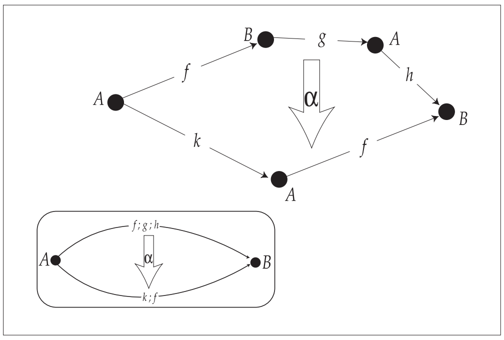

図 11: 一般 2 次元セル．この図の右上の 2 次元セルは普通左下の 2 次元セルを解釈される。しかし、この解釈は「合成」が確定していることを使っているので、合成が確定しない高次元圏では右上のような図自身に意味を与えなければならない。

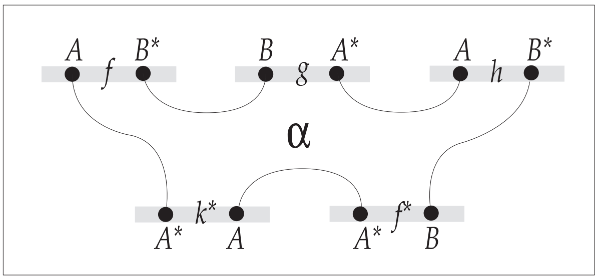

図 12: 一般２次元セルのリンク表示．出力側の１次元セルは双対型 k^* を与えることにより「出力側」であることを表示している。図 11 の右上の図の頂点を “blow-up” した図と見ればわかりやすい。

る辺に対して、頂点を分離してリンクで結んだだけの変形である。この図は既に多重圏の射の合成で現れたもの (図 8) と同じである。

問題は２次元セルの合成にある。２次元セルを合成するという概念がある (図 13) が、それを基にして（より正確には他に水平合成という概念があり、

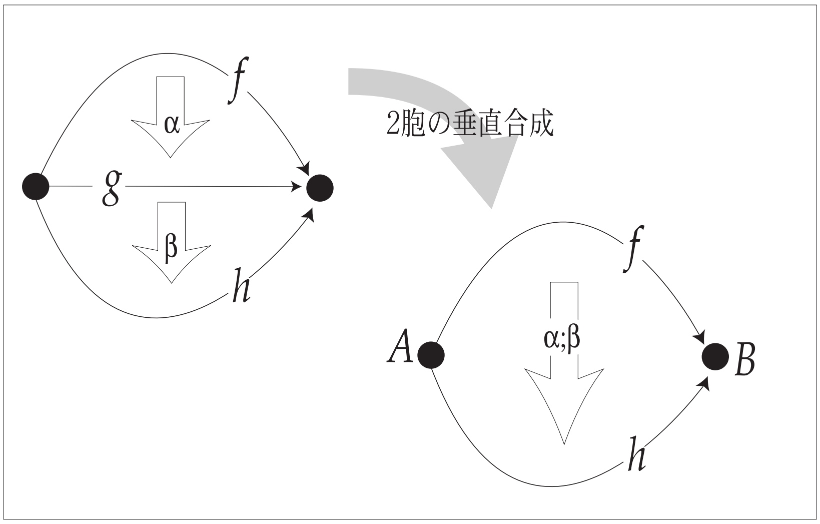

図 13: ２次元セルの垂直合成．

これが垂直合成と interchange law と呼ばれる関係を持っていることにより）「辺を共有する」一般２次元セルを張り合わせることができる（図 14 ）。これをリンクで表示すると図 15 となる。この図自身には次元によらない意味が付けられることが以下説明する。

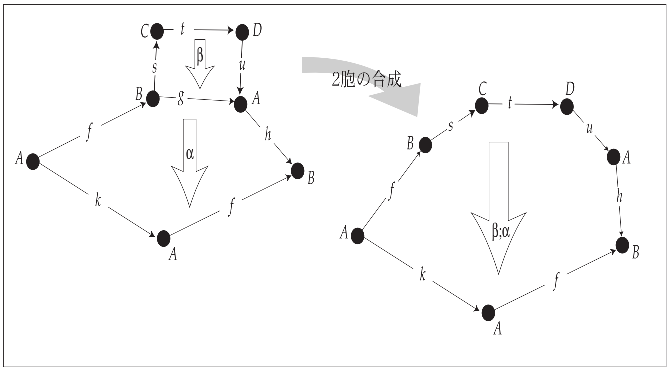

図 14: 一般 2 次元セルの合成. これは $(f;\beta;h):(f;s;t;u;h)\to(f;g;h)$ と $\alpha:(f;g;h)\to(k;f)$ の合成である。

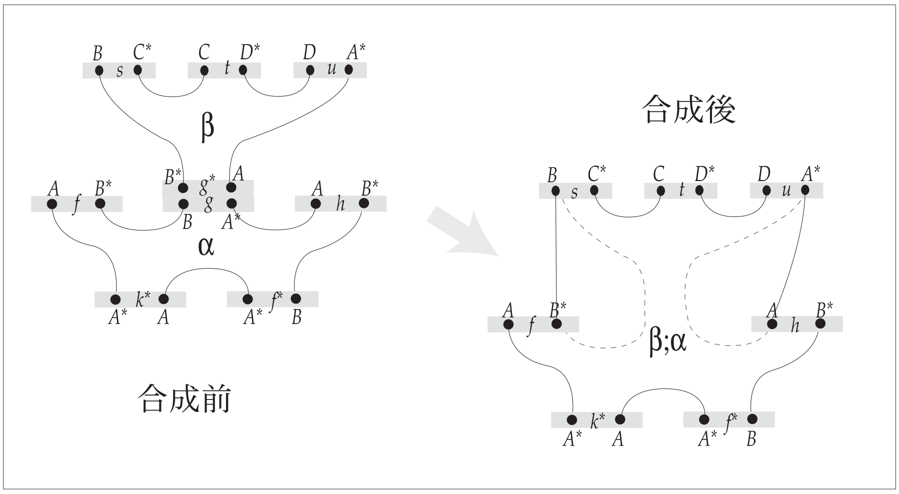

図 15: 一般 2 次元セルの合成のリンク表示

3.2　3次元セルの表示

以上のように、2次元セルについては平面図形による表示が有効なために、リンク表示は不必要ともいえる。ところが、平面図形を用いた2次元セルの表示と同様なものを用いることは3次元セルの段階で最早有効な記述とはならない。このことを具体的な例で説明したい。結合律1を「観測する」プロセス Γ

$$\Gamma : (\alpha_1; \alpha_2) \to (\beta_1; \beta_2) : (f; g; h) \to k : A \to D \tag{3}$$

は図 16 のような3次元セルで表される [13]。これは立体的に表示すると図

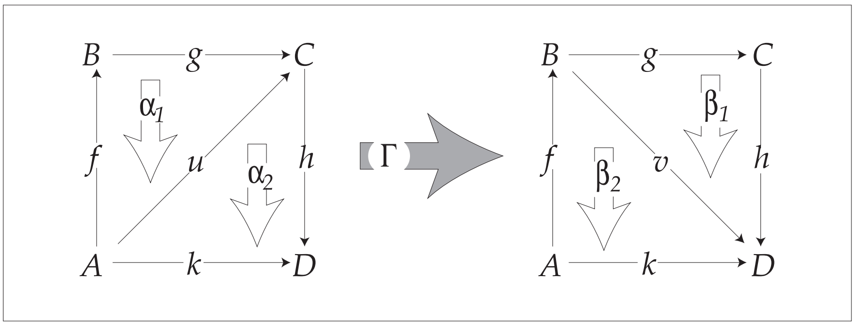

図 16: 結合法則を観測する3次元セルの原始的は図示法

17 のようになるが、さらに3次元セル Γ の立体的な様相を強調して描けば図 18 のようになる。これを中心を通り AD を結ぶ直径と垂直な平面で切ったものが考えると図 19 のようになる。しかし、立体的な図はすでに実用的なものではなくなっていると思われるし、他の平面的な図では3次元セルの持つ有機的構造は明示的には表示されていない。例えば、図 16 では Γ の定義域と値域の持つ構造体の間の関係は、運良くどの対象も重複して出てきてはいないので確定しているが、重複する場合にはこの図だけでは確定できない。リンク図を用いるとこういう情報も入れて図 20 のように簡潔に表示される。これは2次元セルのリンク表示 15 と全く同じ表示になっている。この際、各1次元セルの構造と2次元セルのリンク情報は隠蔽されているが、必要に応じて図 21 のように書き込むことができる。ここでは1次元セルの最も簡潔な表示（図 4 の最下部）を用いている。

ここで 1-link (図の太線、これは1次元セルどうしの対応を表す）と 0-link (図の細線、これは0次元セルどうしの対応を表す）とがあらわれるが、これらの間には次のような関係である：1-link と 0-link を交互に辿ると（図 22 の破線のような）サイクルが得られるが、これは各2次元セル内の 0-link は高々ひとつしか使っていない。これは、別の言い方をすると各2次元セルの 0-link は、それ以外の2次元セルの 0-link と 1-link によって決定できる、ということを意味する。すなわち、ある2次元セル α の端子である1次元セル

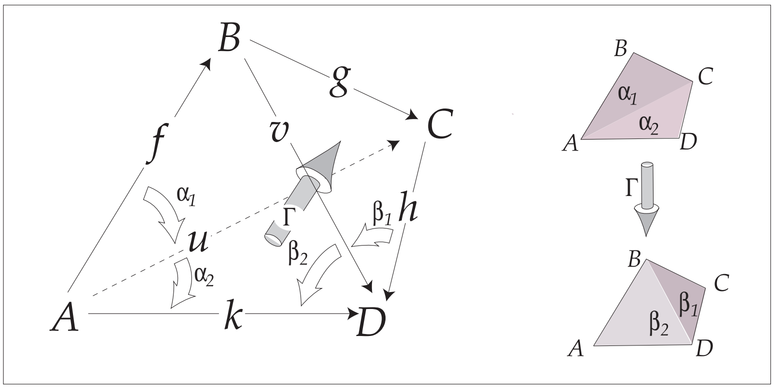

図 17: 4 面体の中身としての 3 次元セルの表示．3 角形 $ABC(\alpha_1)$ と $ACD(\alpha_2)$ を u で合わせた面から 3 角形 $BCD(\beta_1)$ と $ABD(\beta_2)$ を v で合わせた面への 3 次元的なものと Γ を考えることができる．

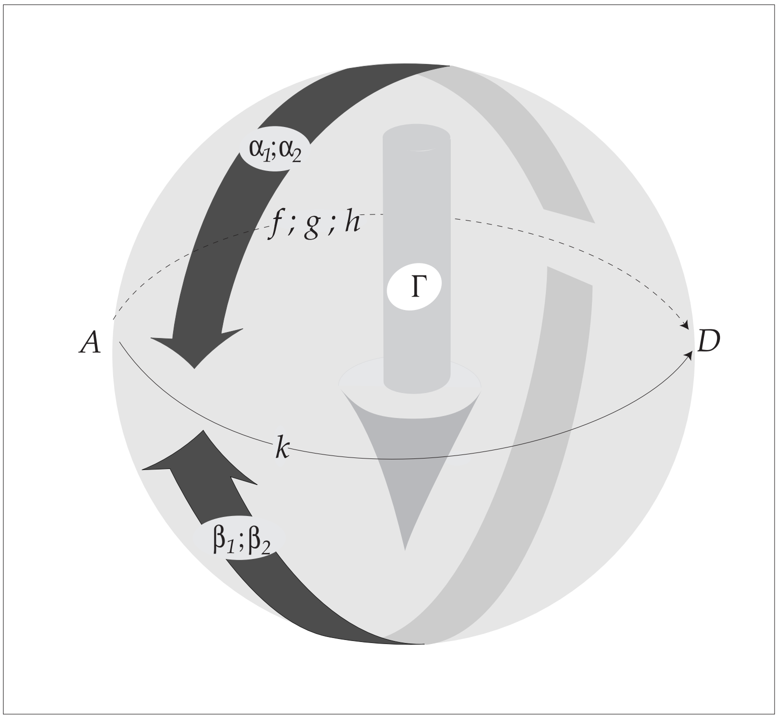

図 18: α_1,α_2 を合成した 2 次元セルを上半球、β_1,β_2 を合成した 2 次元セルは下半球で示し、Γ は上半球から下半球へ向かう球の中身として見なされる。

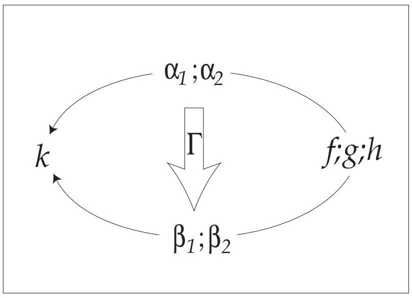

図 19: A から D への射の世界を土台として考えれば、次元が 1 ずつ下がってこのような図で 3 次元セルが表示される。

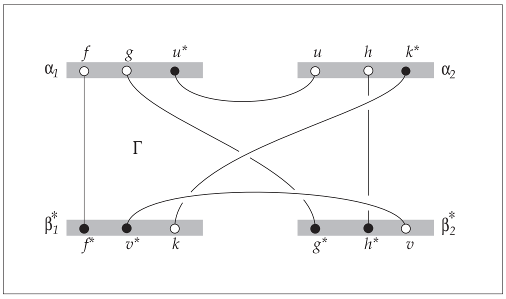

図 20: ここでは 2 次元セルは線分で表され 3 次元セルは線分の端子の上下の結合として表示される。

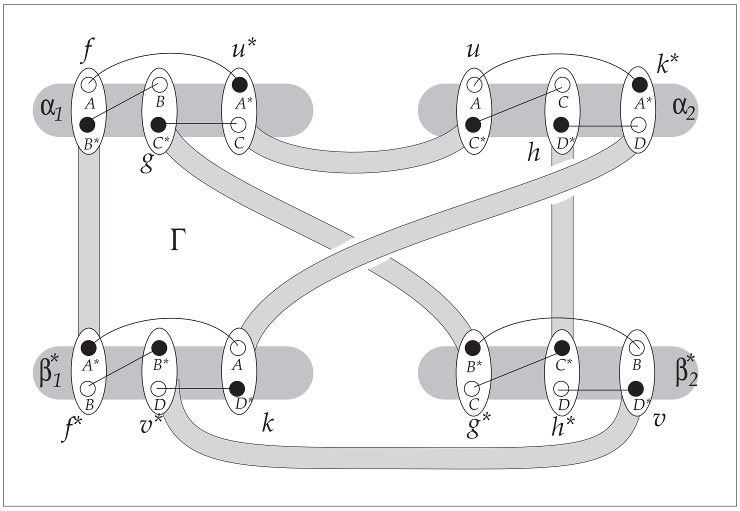

図 21: 図 20 で 1 次元セルの中身も表示したもの

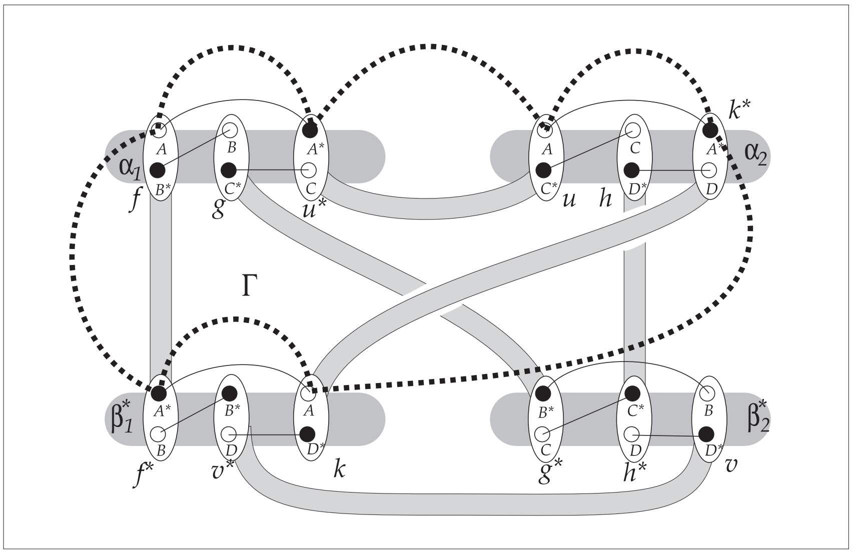

図 22: 1-link と 0-link を交互に辿るサイクル. このサイクルは各２次元セルの 0-link は高々１つしか使っていないが、これが隣接する次元リンクの間の唯一の関係である。

f のある端子 P に対し、それが他のどの１次元セルのどの端子とリンクされているかを見るには、α 以外の２次元セルの 0-link と全体の 1-link とを交互に辿って得られる道を考えるときこれは P から始まって α のある端子 Q で終わる。このとき α のリンクは P を Q に結ぶものとなっている。

3.3 高次元セルの概念

以上の３次元セルの表現はただちに高次元へ拡張可能である。しかし、ここでも様々な選択肢があり決定版はない。ここでは Baez-Dolan[3] による opetopic set に近いものを紹介する。少し不正確であるが、n 次元セルと n 次元枠について説明する。実際には次元についての帰納法で、まず n 次元枠を定義し各 n 次元枠ごとにそれを枠に持つ n 次元セルを勝手に指定するというステップがありこれが opetopic set の多様性を可能にする。なお各 n 次元セル α に対してその双対セル α^* も同時に導入する。

1. n 次元セル α は $n \geq 1$ のときは n 次元枠 $\partial\alpha$ を持つ。
2. n 次元枠 β は
   (a) $n = 0$ のときはある与えられた集合 T_0 の元を意味する。この集合は固定点のない involution[8] $a \mapsto a^*$ を持つものとする。

[8] ２回続けると元に戻る変換のこと。ここでは $a^{**} = a$ ということを意味する。

(b) $n>0$ のときは $n-1$ 次元セルの有限列 $|\beta| = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ と $(n-2)$-link 情報 ℓ_β からなる。ただし、$n-2$-link 情報 ℓ_β は

i. $n \leq 1$ のときは $\emptyset$,

ii. $n \geq 2$ のときは、$n-2$ 次元セルの列

$$||\beta|| := |\partial\beta_1| \bullet \cdots \bullet |\partial\beta_m|^9$$

の involutive な並べ替えと、i 番目と j 番目が対応している場合には i 番目の $n-2$ 次元セルから j 番目の $n-2$ 次元セルへの反同型 (後で定義) から成立っている。

iii. $n \geq 3$ のときは

$$|||\beta||| := ||\partial\beta_1|| \bullet \cdots \bullet ||\partial\beta_m||$$

上のある $(n-2)$-link と $(n-3)$-link とが 3 次元セルの時に述べたような意味で整合的である。

3. 各 m 次元セル α には**双対セル**α^* があり、

$$\partial(\alpha^*) = (\partial\alpha)^*$$

である。ただし、m 次元枠の双対は各成分セルを双対に置き換えリンクは変えないものとする。

4. m 次元枠 α, β の間の**反同型**とは α, β^* の間の同型である。

5. m 次元枠の間の**同型**とは順序の入れ替えと、$m \geq 1$ の場合には対応する $m-1$ 次元セルの間の同型の組をいう。

6. n 次元セル α の枠 $\partial\alpha$ と n 次元枠 B が同型であるとき $\partial\alpha' = B$ であるような n 次元セル α' がただ一つ存在する[10]。

例による説明. これを先程の図で説明しよう。図 20 で Γ を記入していないものが 3 次元枠である。これは列 $\gamma := (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1^*, \beta_2^*)$ からなる。

$$||\gamma|| = (f, g, u^*, u, h, k^*, f^*, v^*, k, g^*, h^*, v)$$

であり、1-link は 各 1 次元セルは唯一の対となって出てきているので確定している。次に

$$\begin{aligned} |||\gamma||| \quad = \quad & (A, B^*, B, C^*, A^*, C, A, C*, C, D^*, A^*, D, \\ & A^*, B, B^*, D, A, D^*, B^*, C, C^*, D, B, D^*) \end{aligned}$$

であり、0-link は図 21 にある細い線で表された

$$(1,5)(2,3)(4,6)(7,11)(8,9)(10,12)(13,17)(14,15)(16,18)(19,23)(20,21)(22,24)$$

であり、1-link は太い線で対応する 0 次元セルを対応させた

$$(1,13)(2,14)(3,19)(4,20)(5,7)(6,8)(9,21)(10,22)(11,17)(12,18)(15,23)(16,24).$$

となっている。この 2 つの involution を交互にたどる力学系のサイクルには各 2 次元セルの 0-link は高々一つしか含まれていない、というのが整合性の条件である。

[9] $w \bullet v$ は列 w, v を連結した列.

[10] n 次元枠の定式化で $n-1$ 次元セルを一列に並べるという形式を取ることから必要になる条件。実際には有限集合と全単射の圏上の要素圏の概念を用いればこういう不自然な条件は不要となる [15]。

4　高次元カテゴリー

高次元セルの概念が明確になると高次元圏を考える段階に入るが、ここでは Baez の考え [1] を簡単に紹介するにとどめる。Baez の構想の具体化には多くの選択肢があるために多様な定式化がされている。Baez-Dolan によるもの [3] 以外に、Makkai 等による多重圏に基づく定式化 [6, 7]・三好博之による組み合わせ的な定式化 [11] の他にもいくつかの定式化があり、それぞれ長所があって決定版はない現状である。[11]

4.1　骨格と結合図式

n 次元枠の定義における $n-1$ 次元セルを $n-1$ 次元枠に置きなおした概念が定義される。これをn **次元骨格**という[12]。これに意味があるのは、n 次元枠の定義におけるリンク情報は列の成分である $n-1$ 次元セル達の枠しか使わなかったからである。 $n=0,1$ のときは, n 次元骨格はただ一つであるとしそれを 0 と書く. n 次元枠 γ の $n-1$ 次元セルの情報を取り去ったものを $[\gamma]$ と書く。

図 21 で $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \Gamma$ を消去したものが 3 次元骨格となる。

n 次元セル α と n 次元枠 B と n 次元骨格 ℓ が

$$\partial\alpha = B, \quad [B] = \ell$$

という関係にある時 B を**ℓ-枠** といい ℓ はα **の骨格**であるという.

$n \geq 2$ で ℓ が n 次元骨格であるとき, ℓ 枠 $B = (w_1, \cdots, w_m, w_o^*)$ を

$$\ell[w_1, \cdots, w_m \overset{?}{\to} w_o]_n$$

と書く.

さらに w_o の部分の $n-1$ 次元セルの情報がないとき、これを**ℓ-結合図式**[13]といい,

$$\ell[w_1, \cdots, w_m \overset{?}{\to} ?]_n \tag{4}$$

と書く。これは $n-1$ 次元セルの結合できる配置におく情報を与えている。

さらに i 番目の w_i の情報がないとき**不完全 ℓ-結合図式**[14] といい,

$$\ell[w_1, \cdots, w_{i-1}, ?, w_{i+1}, \cdots, w_m \overset{?}{\to} ?]_n$$

と書く.

---

[11] むしろ「決定版」などというものはないようにも思われるが Baez は高次元圏論が発散してしまわないためには少なくとも様々な定式化を比較することが重要であると考えている [2]。

[12] Baez-Dolan[3] では n-opening と呼ぶ

[13] [3] では n-niche

[14] [3] では punctured n-niche

このような隙間のある図式に対し，それを拡張する n 次元セル w

$$\ell[w_1, \cdots, w_m \xrightarrow{w} w_o]_n$$

をその図式の**拡充**という．同じ図の 2 拡充は**競合する**という。

4.2 弱高次元圏

弱高次元圏[15]の定義の決定版はまだないことは先程述べたとおりであるが、Baez [1] が示した画期的な方向を基底においていることは共通している。ここではその共通したアイディアだけを述べる。詳細は引用文献を参照して頂きたい。

- 合成可能な図式 (n 次元結合図式 (4)) の拡充の中からいくつかを選びだしそれぞれを**合成拡充**と呼ぶ。各合成拡充 w にたいしてその結果埋められる $n-1$ 次元セルを $w_1, \cdots, w_m$ の w による**合成**と呼ぶ。
- 合成は唯一にはきまらないが他の合成との間には「同型」がある。
- 合成セルの合成は合成セルである。

ここで同型の概念は自明ではない[16]。なお、Baez-Dolan[3] では、ある次元以上では狭義高次元圏となる仮定をおいているために、各 opetopic set における合成拡充と同型の概念が定まり、それが高次元圏か否かとい問いが意味をなす。しかしこの仮定を設けない場合には合成や同型の概念は構造の一部として与えるべきものとなる。

4.3 同型

f, g はある m 次元枠の競合する拡充であるとする。$m+1$ 次元セル α (図 23 の左下のようなリンク図) が f, g の間の同型 であるとは、図 23 の右の２つの m 次元不完全結合図式が**均衡する**ことをいう。右の 2 図が均衡するとは、各々大体次のようなことを意味する。

- α の出力端子 g を $m+1$ 次元セルの g-入力端子 につなぐ 操作
- $m+1$ 次元セルの f-出力端子を α の f 端子につなぐ 操作

は、ともに $m+1$ 次元セルの間のほぼ一対一対応を与える。「ほぼ」というのは、「つなぐ」（合成）という操作が不定性を持っているからである。均衡の規定にはより高い次元での均衡概念が必要なので、[3] のようにある次元以上は狭義高次元圏であると仮定しない限り均衡の概念は確定しない。逆にいうと一般には均衡（そして同型）の概念は別に指定する必要がある。

[15] 狭義の高次元圏の概念は比較的古くから確定している (cf. [13])。
[16] これも高次元圏の構造の一部となる。

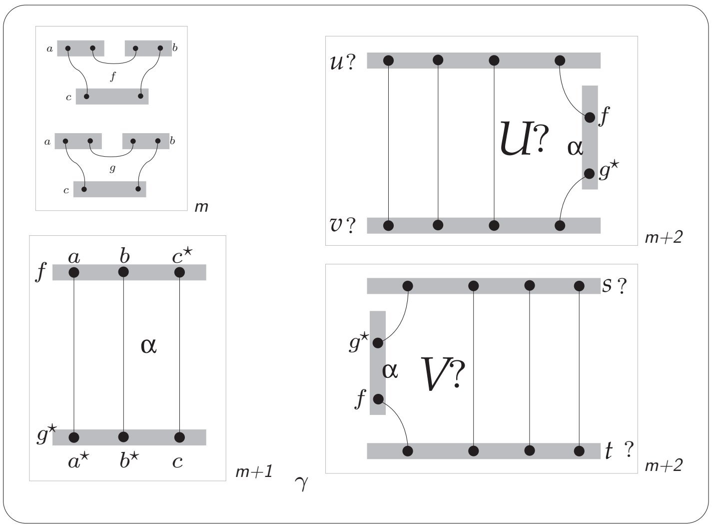

図 23: 同型. 左上のような同じ枠を持つ f, g の間の同型 α を定義する。

5 後書

いま急速に発展している高次元圏論のほんの入り口を紹介した。これが内部観測とどのように関係するか最後に簡単に触れておこう。

郡司 [5] による生命理論では、生命現象における「徹底した不定性」に着目する。この不定性は決まった範囲の中で決まっていないという生易しいものではなく、そもそも選択肢は何かというさえも決まっていないようなものであり、確率論で取り扱う不定性とは似て非なるものとなっている。

この不定性は形式的には表現しようがない。うまくやれば形式化できると考えることは生命は機械としてとらえられるということとほぼ同じ考えである。この点については序でも少し論じたが [5, 14] で詳しく論じられている。ここでは不定性を考えるために高次元圏が使えることを説明しよう。

数学では対象の構成において「同型を除いて」しか唯一つには定まらない場合が普通である。しかし、同型は同値関係を生成するので、構成された対象は同値類としては確定すると考えることができて、「不定性」は見かけのものであったと考えることができる。

ところが「同型が同値関係を生成する」という主張の背景には、同型の「合成」は唯一つ決まりそれがまた同型となっている、という暗黙の仮定があるだけでなく、合成を続けるということには何の問題もないという前提が潜在している。しかし「合成」という無名な操作にも目を向けると、同型の合成操作自身が「同型の同型」を除いてしか決まらないという様相が表面化する。こういった面を考えると、同型の合成が確定するという上の仮定は単純化しすぎているという見方が生じる。

このように同値関係を構成する際に行う「推移的閉包」をとるという自明なプロセス自身に目を移し、そこに隠れている「合成」の複雑な相互作用を問題にし始めるとき、もはや不定性は解消しようのないものとなる[17]。高次元圏論はこのようなやっかいな不定性をそのままにして議論する枠組みであると考えることも的外れではなかろう。ただ、この不定性は内部観測の「徹底した不定性」そのものではなく、それを考えるための隠喩であるに過ぎないことは言うまでもない、ただし契機としての隠喩 [5, 14] であるが。

高次圏論の由来は複雑系とは直接関係はないが [2]、複雑系の数理においてもその意義は明確であると感じている。私にとって高次元圏論は、複雑系の数理的研究を契機に予想外の数学が「創発」していくであろうという期待を深めるものの一つとなっている。

参考文献

[1] J. Baez, n-Categories - Sketch of a Definition (letter from John Baez and James Dolan to Ross Street, Nov. 29, 1995; corrected version as of Dec. 3, 1995) "`http://math.ucr.edu/home/baez/ncat.def.html`"

[2] John C. Baez, An introduction to n-categories, "`http://math.ucr.edu/home/baez/ncat.ps`".

[3] John C. Baez and James Dolan, Higer-Dimensional Algebra III: n-categories and the Algebra of Opetopes, prerpint. ("`http://math.ucr.edu/home/baez/op.ps`")

[4] Ronald Brown, Higher Dimensional Group Theory, "`http://www.bangor.ac.uk/~mas010/hdaweb2.htm`".

[5] 郡司ペギオ幸夫「 生命と時間、そして原生-計算と存在論的観測」現代思想 1994.9(142-163),1994.11(359-382),1994.12(313-330),1995.4(308-339),1995.5(254-267),1995.8(218-264),1995.12(254-267),1996.6(325-335),1996.9(156-181),1996.11(256-287).

[6] C. Hermida, M. Makkai and J. Power. Higher dimensional multigraphs, preprint.

[7] C. Hermida, higher-dimensional multicategories - handwritten slides of talks presented at CT97 (Vancouver, July 1997) and the AMS Meeting, Montreal, September 1997, "`http://www.math.mcgill.ca/~hermida/papers/n-cats`".

[8] 金子邦彦・津田一郎「複雑系のカオス的シナリオ」朝倉１９９６.

[17] [9, 10] はこれを徹底的に論じている。

[9] M. Makkai, Avoiding the axiom of choice in general category theory, J. Pure and Applied Algebra, 108 (1996) 109–173.

[10] M. Makkai, Towards a categorical foundation of mathematics, talk at the Logic Colloquium in Haifa, 1995.

[11] H. Miyoshi. A combinatrial definition of Baez-Dolan ω-category (abridged version), draft, Mar 1997, "`http://home.ccb.shukutoku.ac.jp/faculty/miyoshi/papers/bdcat.ps.gz`".

[12] マイケル・ポランニー（長尾史郎訳）「個人的知識」ハーベスト社 1985.

[13] R.H.Street, The algebra of oriented simplexes, J. Pure Appl. Algebra 49 (1987), 283-336.

[14] 辻下　徹. 「生命と複雑系」(複雑系の科学と現代思想「数学」に収録）青土社.

[15] 辻下　徹. 北海道大学大学院理学研究科「複雑系論」１９９７年度後期. ("`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/am97.html`")

[16] T. Tsujishita, Link diagrams of higher dimensional cells, in preparation.