数学と複雑システム学の多様な関係

北海道大学理学研究科
辻下　徹

1998.10.3

テーマ:　　不定性

目次:

- 数学システム学の趣旨
- 個人的経緯
  - コヒーレンスと束
  - 心脳問題
- 内部観測論
  - クリプキの議論
  - ２つの無限
  - 契機系
- 「まとめ」

複雑システム学の趣旨

- 生物・社会・言語などを「 生きもの 」として見る。
- 従来の生物学の方法・概念に捕らわれない。
  （ 大野克嗣 :「 基礎生物学としての複雑系研究 」 ）

⇓

$\boxed{\text{複雑システム学　基礎生命学}}$

複雑システム研究の２つの立場

複雑系機械論

- 生物も規則に従うものとして記述できる。
- 基本的問い：
  - 生命系はどういう規則に従うか？
  - 生命や心を持つには機械はどのくらい複雑でなければならないか？
- 数学を「写実的モデル」の構成に使う。

内部観測論

- 生命系は、「規則に従う」のでなく「認識し行為」する。
  - 「認識者を含む客観的世界」は整合的でない。
  - 生命性は対象の客観的性質ではない。
- 基本的問い：
  - 規則に替わる説明様式は何か？
  - 「生命を持つ」とみるのはどういう態度か？
- 数学を「契機系」の構成に使う。

取り組みの個人的経緯

- 作業仮説：「 心は脳の機能である 」
  - 「 相互還元不能な多重記述系 」が問題設定に不可分に関与

⇓

- 数学的記述法の吟味・模索

  コヒーレンス・共通知識・分散系

- 数学的語り方の吟味・模索

  内的集合論、直観主義集合論＝トポス、高次元圏論

- 内部観測論

  Chu space, 高次元圏論

生物機械論

コンピュータ

ハード

モジュール構造

計算

ミクロ

静的（時不変）

要素＋相互作用

創発

自己組織化

セミマクロ

上位機構

挙動

物理世界

進化

生物

動的 e.g. 「カオス遍歴」「ホメオカオス」

因果的概念がセミマクロで使えない

ひきこみ・interlocked

外部依存

コヒーレンスの詳細

推移的有向ハイパーグラフ $\boxed{a_1, \cdots, a_n \to b}$

要素 $a_1, \cdots, a_n$ が共同して要素 b を決定している

この関係（ 有向ハイパーグラフ）が満たす公理

増大性
$$\frac{}{a \to a}$$

単調性
$$\frac{a_1, \cdots, a_n \to b}{a, a_1, \cdots, a_n \to b}$$

推移性
$$\frac{a_1, \cdots, a_n \to b \quad b, b_1, \cdots, b_m \to c}{a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \to c}$$

他の例:

代謝系 分子 $a_1, \cdots, a_n$ は分子 b を生成する。

プロセス イベント $a_1, \cdots, a_n$ が起こればイベント b が起こる。

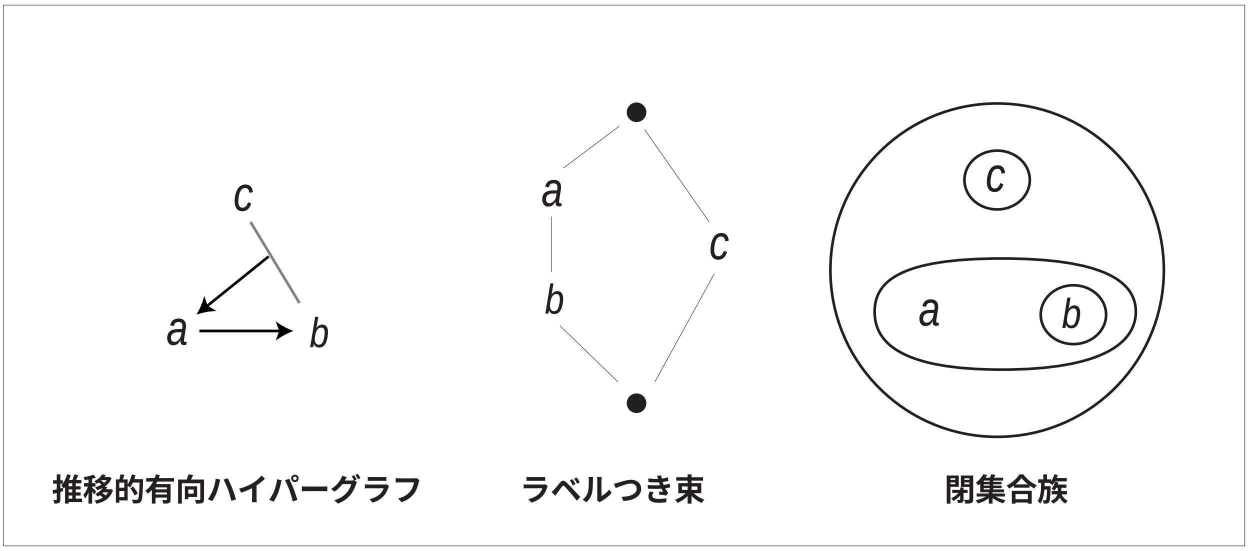
単純論理 命題 $a_1, \cdots, a_n$ から命題 b が導かれる。

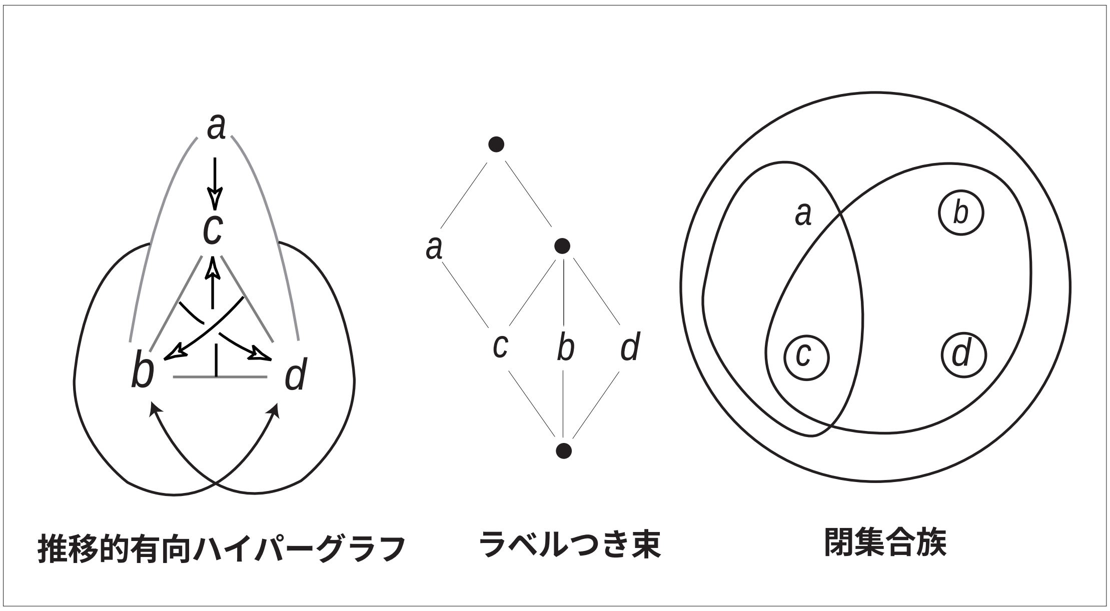
同値な表現

有限個の要素の場合は、次は互いに同等

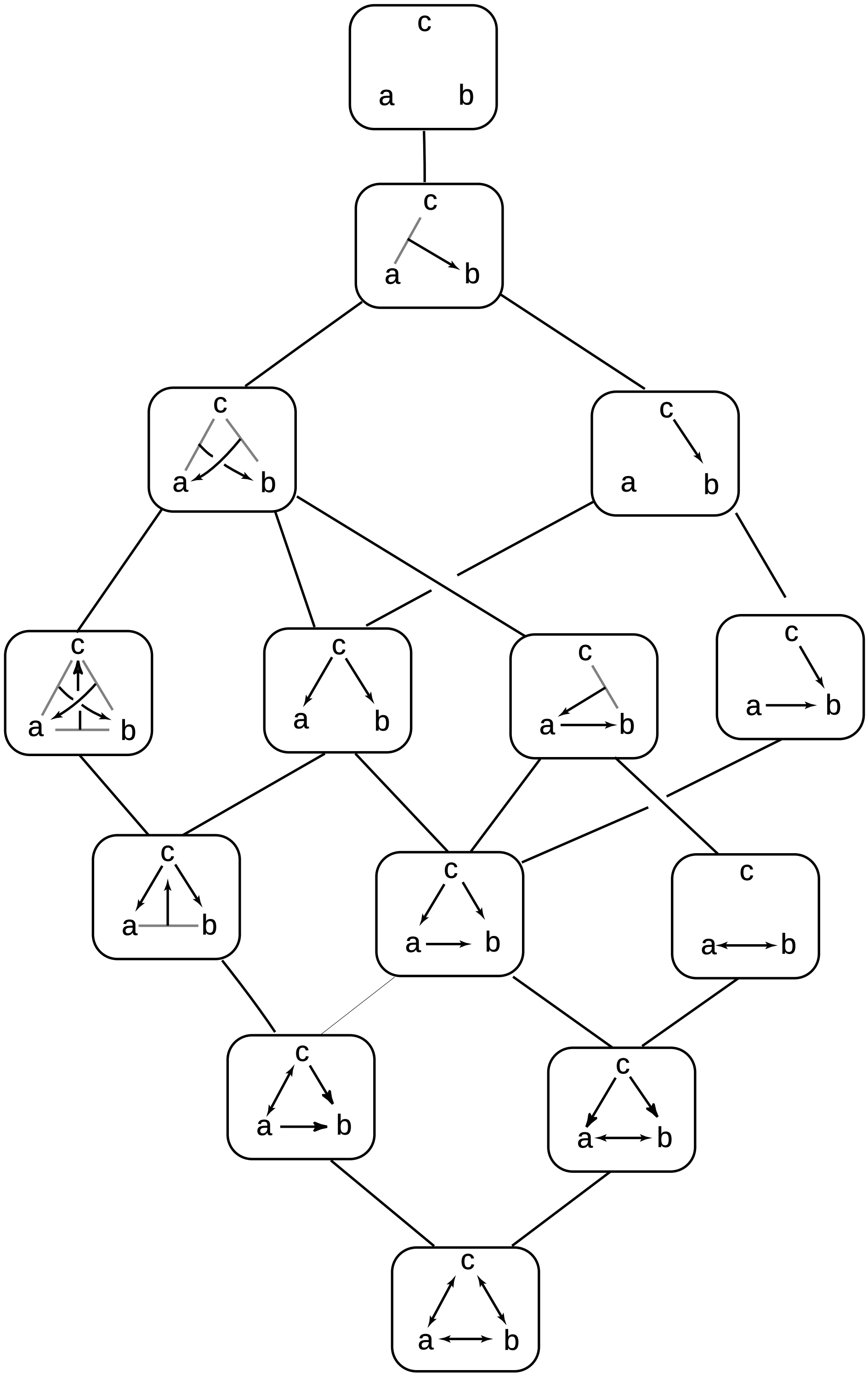
- 推移的有向ハイパーグラフ
- 閉包作用素
- meet closed 部分集合族
- 束ラベル付き集合

コヒーレンスの種々の表現



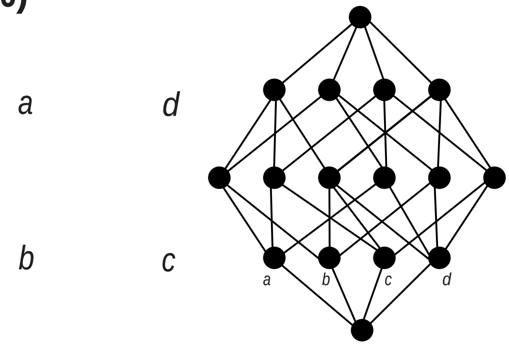


3 成分間のコヒーレンス全体のなす束

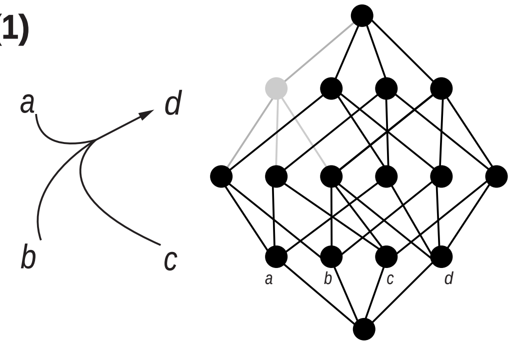


４成分間のコヒーレンスの成長過程の例（１）

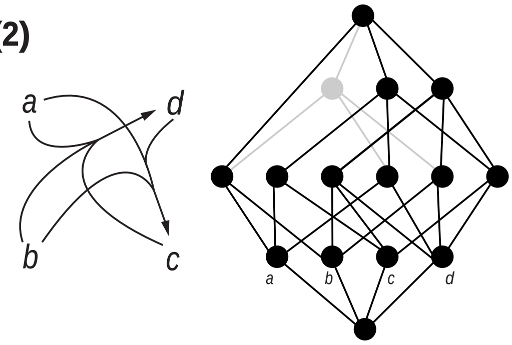
(0)



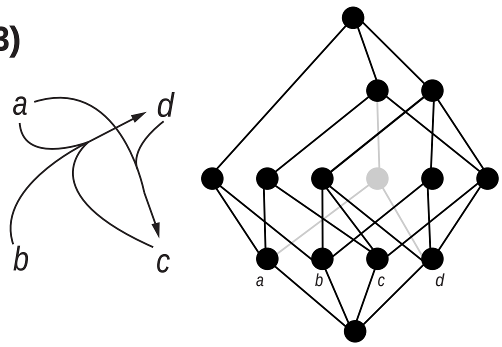
(1)



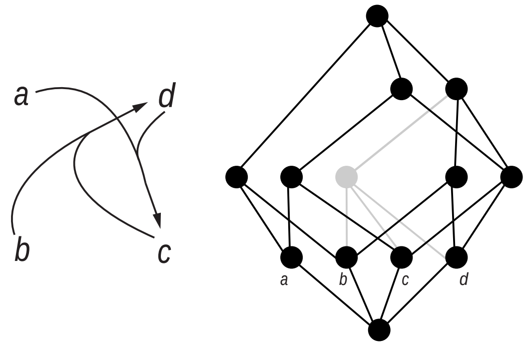
(2)



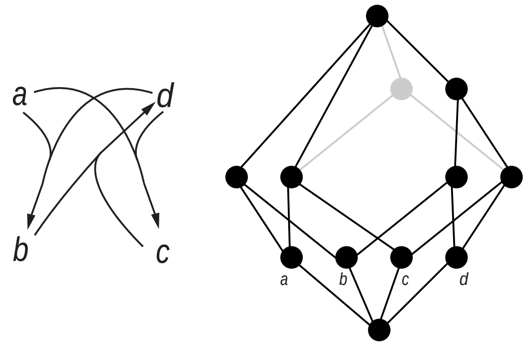
(3)



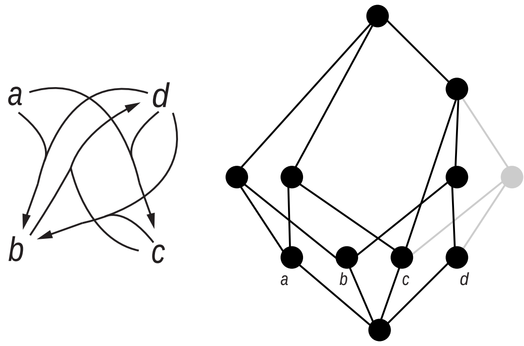
(4)



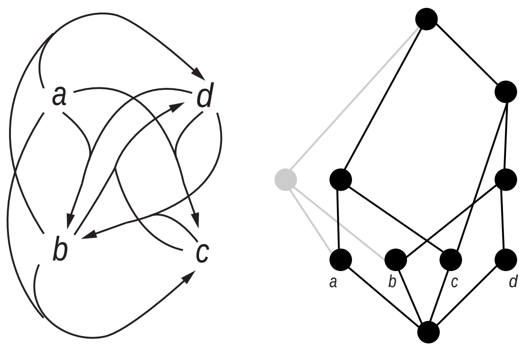
(5)



(6)

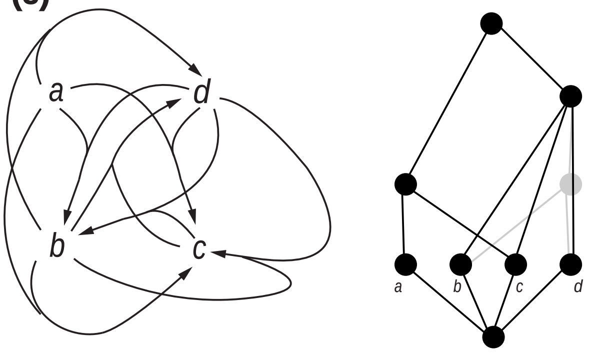


(7)

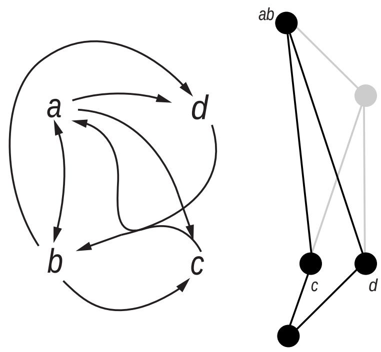


4成分間のコヒーレンスの成長過程の例（2）

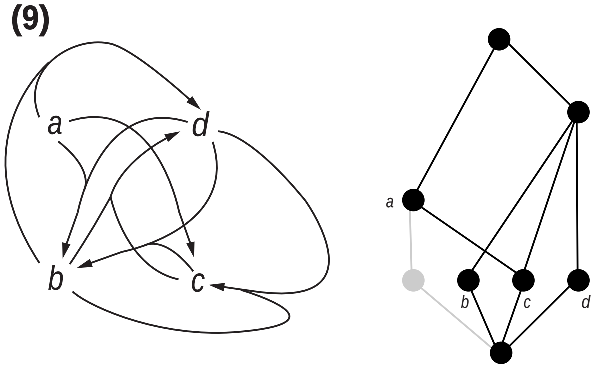
(8)



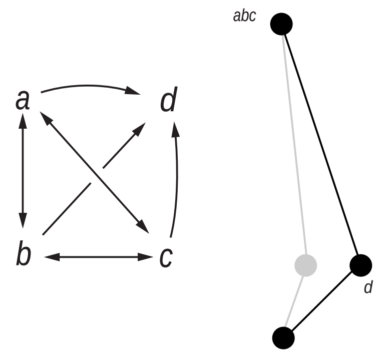
(12)



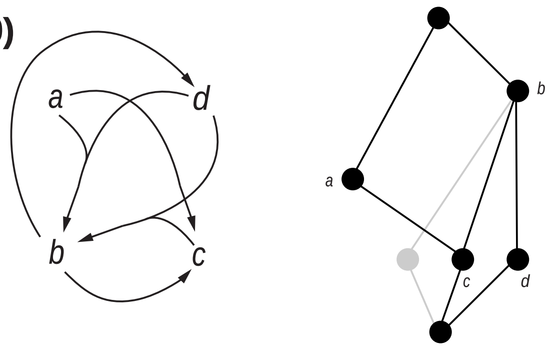
(9)



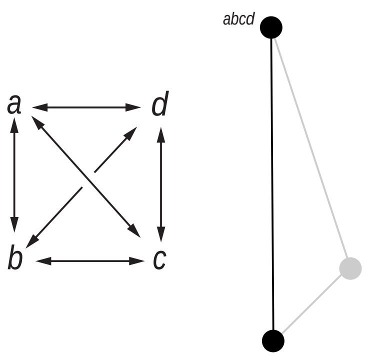
(13)



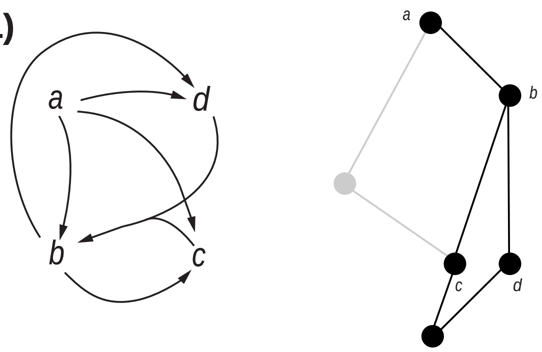
(10)



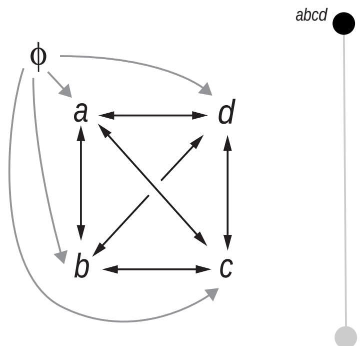
(14)



(11)



(15)



高次元圏

- 推移的グラフ：圏
  ＝推移的有向グラフ：$\boxed{\text{多重圏}}$

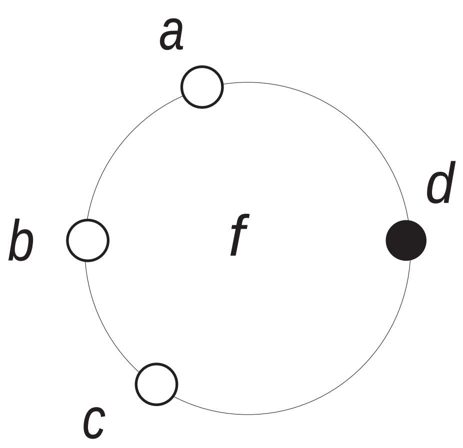
$$f : a_1, \cdots, a_n \to b$$

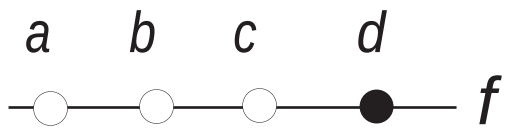
- コヒーレンスの合成法を明示
  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{2 次元圏}}$
  プロセスの合成を与えるプロセスを明示する。

- 合成の合成を与えるプロセスを明示
  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{高次元圏}}$

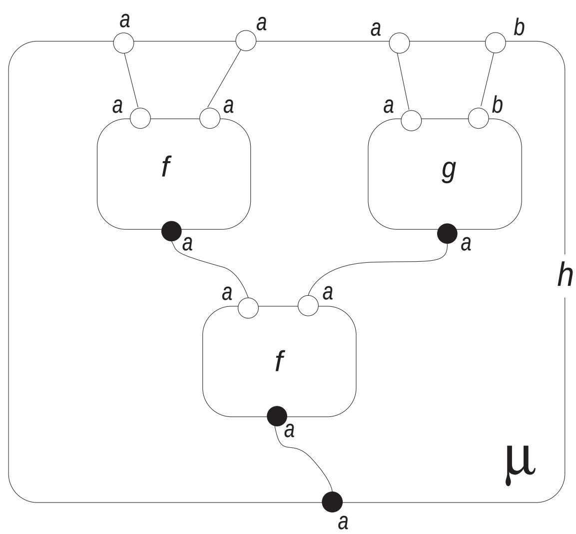
高次元セルの表示法

１次元セル： $f : a, b, c \longrightarrow d$

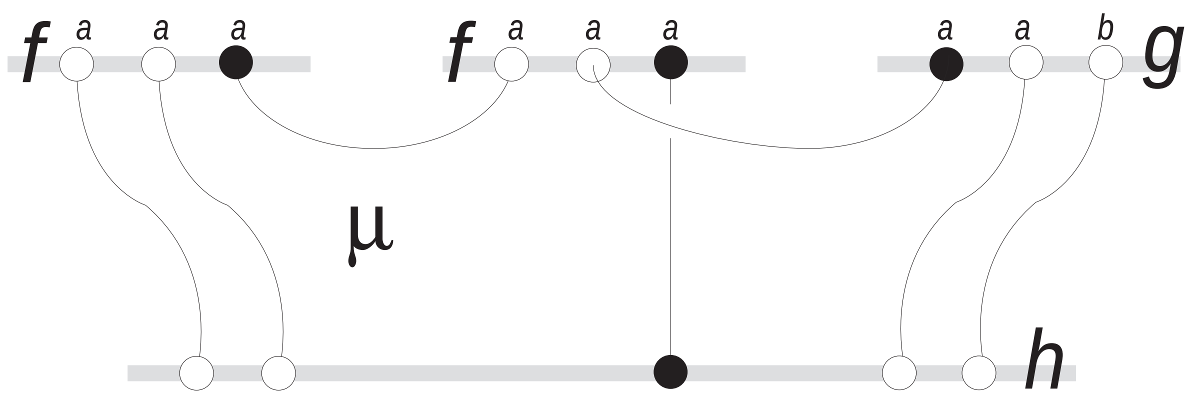




*2*次元セル



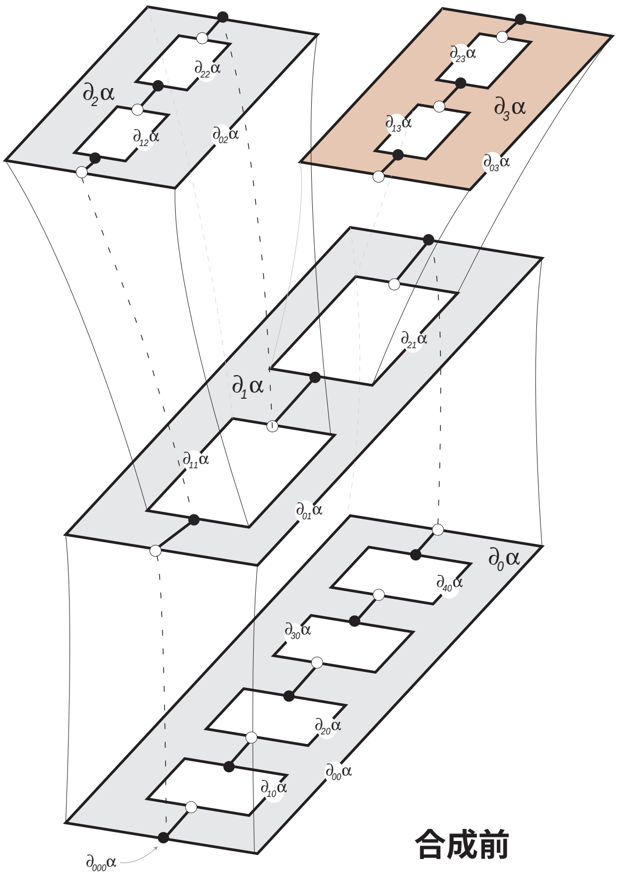
*2*次元セルの別表示

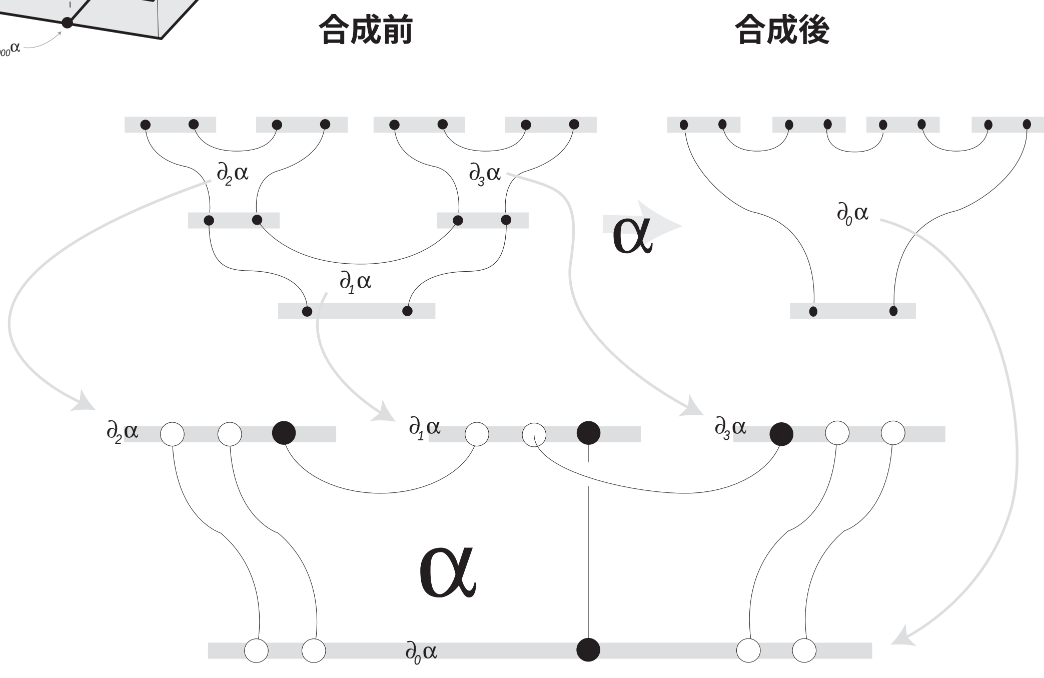


3 次元セルの表示法

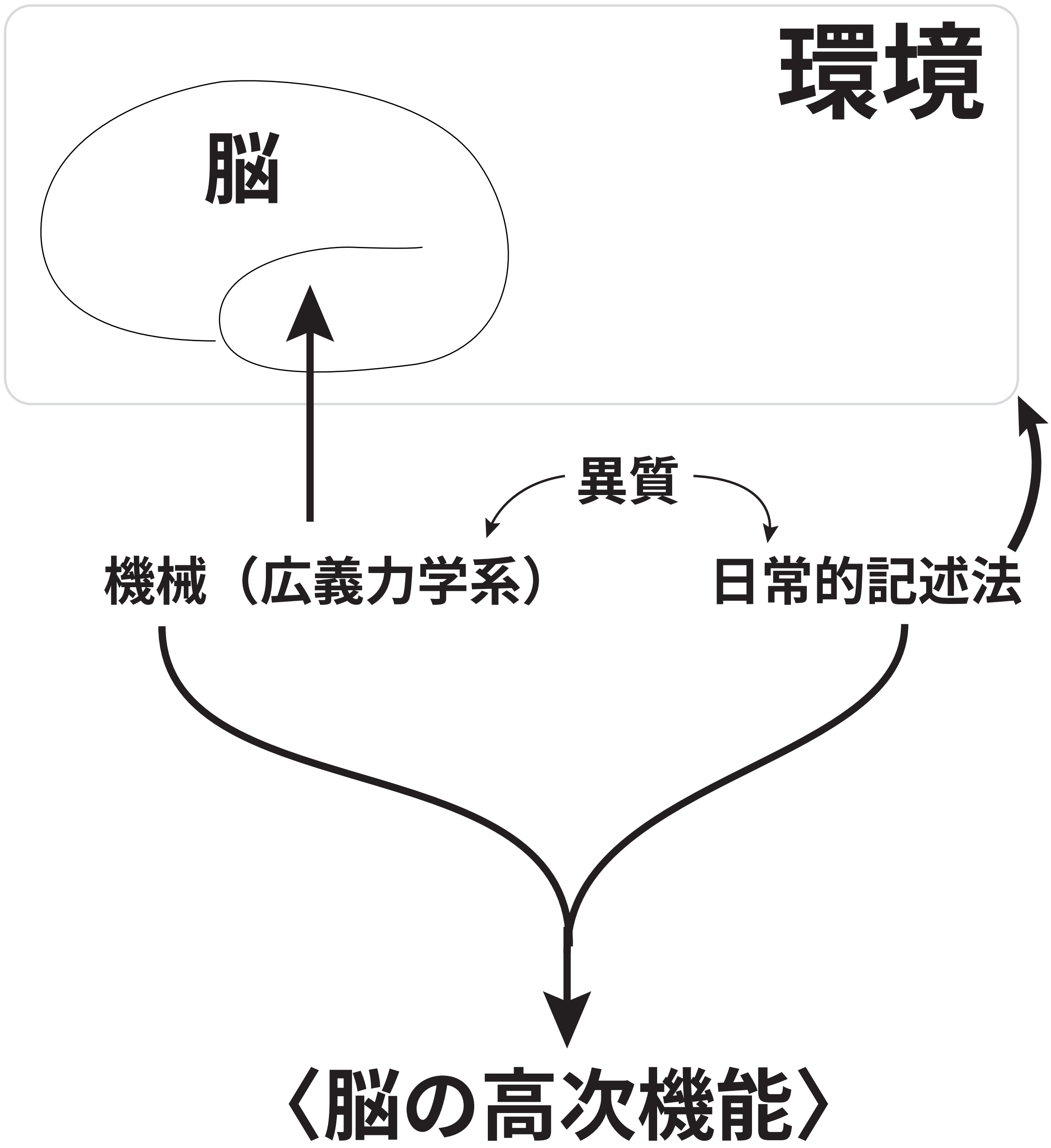
2 次元セルを合成する 3 次元セル　α

$(f \circ g) \circ (h \circ k)$



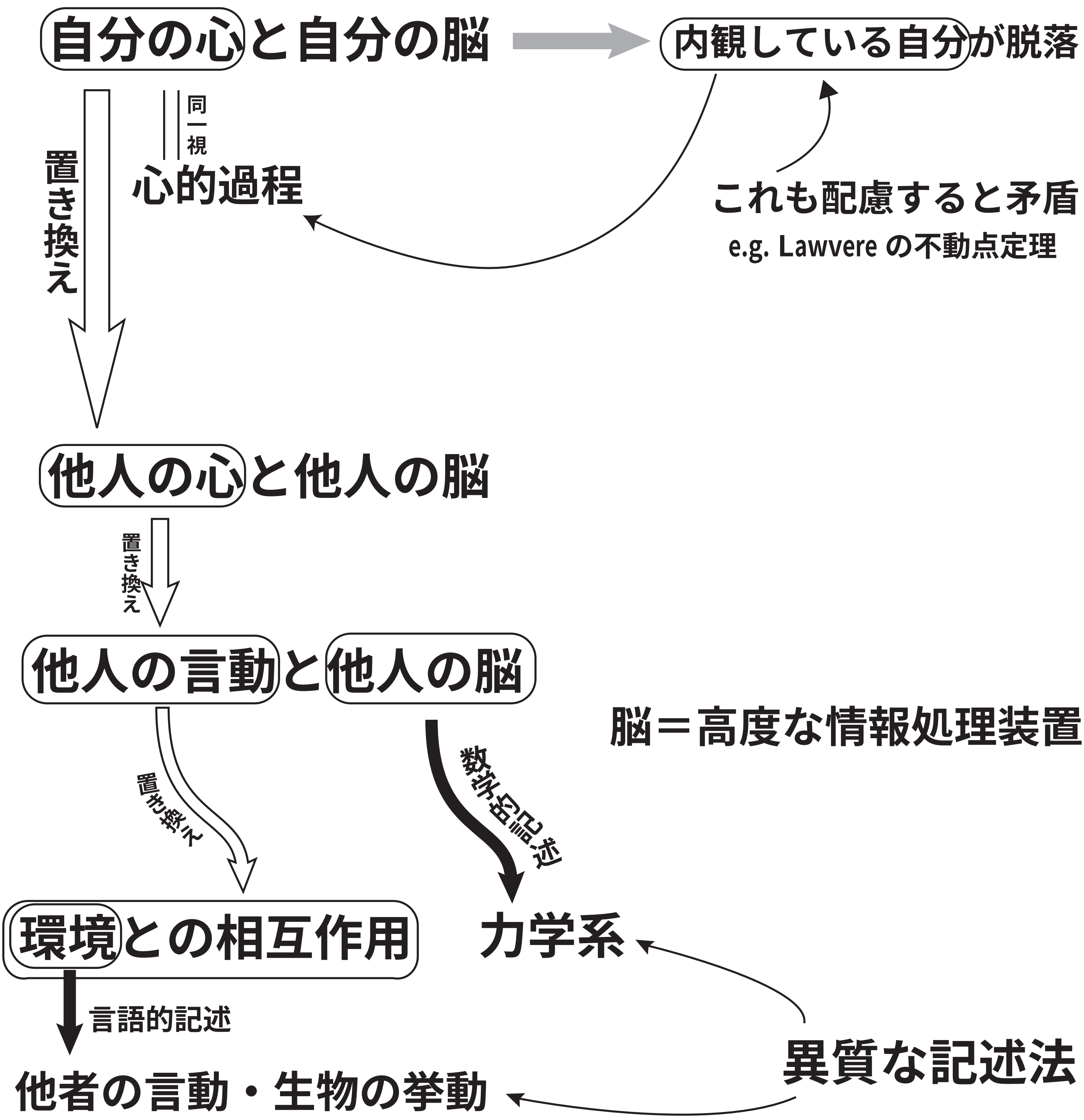


複雑系記述における相互還元不能な記述系達



複雑系の問題は単一の記述系では表現できない
しかも複数の記述系は相互還元不能。

誰の心脳問題?



自分の心と自分の脳
内観している自分が脱落
同一視
置き換え
心的過程
これも配慮すると矛盾
e.g. Lawvere の不動点定理
他人の心と他人の脳
置き換え
他人の言動と他人の脳
脳＝高度な情報処理装置
置き換え
数学的記述
環境との相互作用
力学系
言語的記述
異質な記述法
他者の言動・生物の挙動

「 心は脳内プロセス 」の非整合性

すべての内省概念（ 脳の状態についての考え方）が，脳の状態に対応するということはない.

証明 どの内省判断 X も，ある脳の状態 $\lceil X \rceil$ に対応しているとする．このとき，脳の状態 $\lceil Y \rceil$ が**自己否定的**であることを,「この状態について内省概念 Y がなりたたない」こととする．この内省概念を Q とする．たとえば

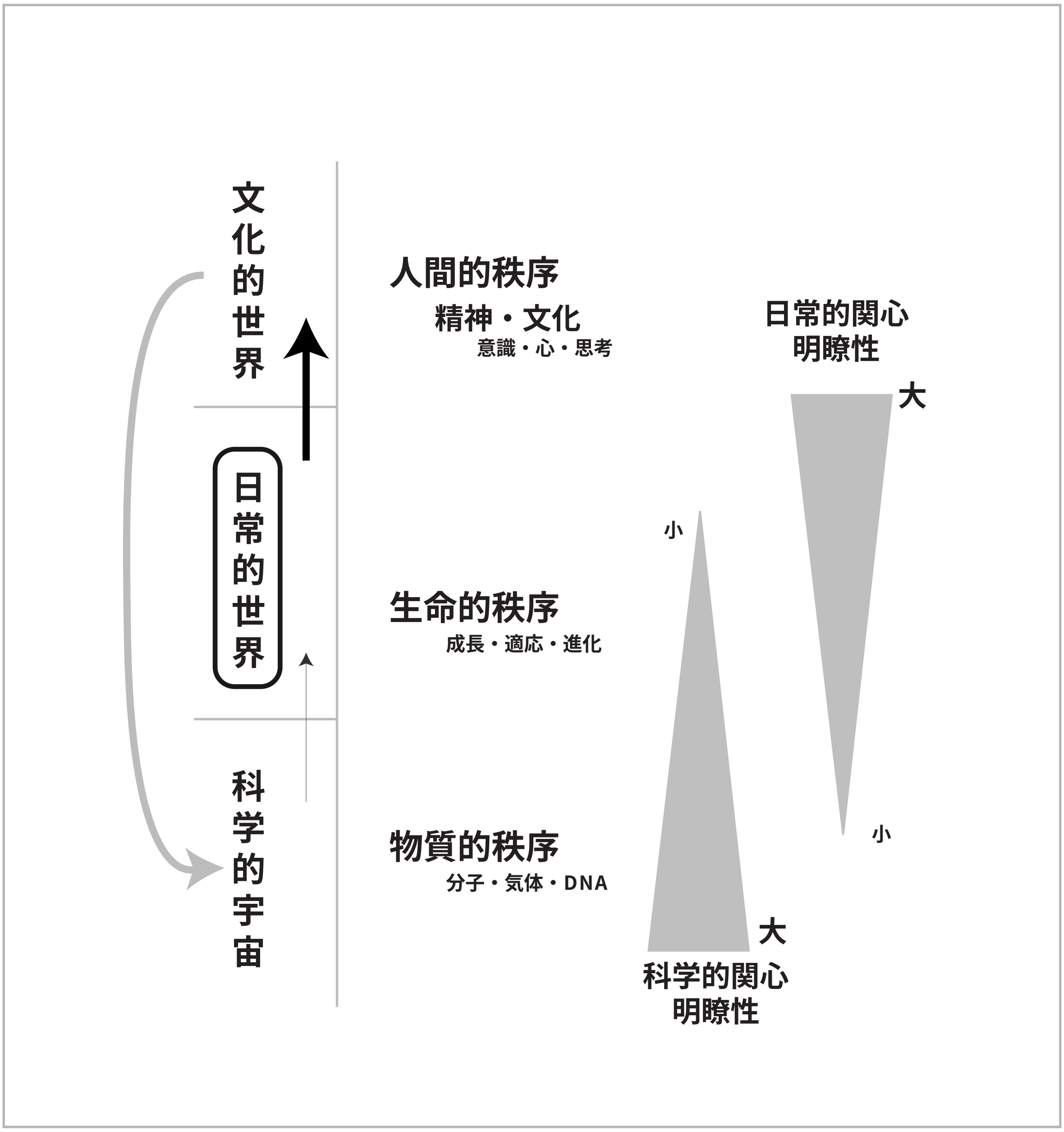
脳の状態	自己否定的
$\lceil X \rceil$	$\lceil X \rceil$ は X でない.
「 調子がよい 」	脳の状態が「調子が良い」かどうかを判断する脳の状態は調子が良くない
「 価値がある 」	脳の状態が「価値がある」かどうかを判断する脳の状態は価値がない.
「 馬鹿げている 」	脳の状態が「馬鹿げている」かどうかを判断する脳の状態は馬鹿げていない.

このとき $Q(\lceil Q \rceil)$ すなわち

脳の状態が「自己否定的である」かどうかを判断する脳の状態は自己否定的である.

の真偽が揺れる。

多重の意味秩序



文化的世界
日常的世界
科学的宇宙
人間的秩序
精神・文化
意識・心・思考
生命的秩序
成長・適応・進化
物質的秩序
分子・気体・DNA
日常的関心
明瞭性
大
小
小
大
科学的関心
明瞭性

内部観測

- 松野孝一郎：プロトバイオロジー 1988
  「 物質同志の不定な相互測定 」
- 郡司ペギオー幸夫：観測志向型理論 1994
  存在論的観測・契機・不定性
- 角田秀一郎：双対論理 1998

複雑性ではなく不定性が問題

不定性の顕現

不定性

同定・予測しよう → 非決定性 カオス

詳述しよう → 複雑さ

全体を見渡そう
枚挙しよう → 無限定・無限

普遍性・客観性を追究
根拠付けよう → 形式化不能 無限後退・矛盾

→ 創発性

チューリングテスト

チューリング　（１９５０年）

機械が知性を持つかどうかの判定法の提案

スクリーンの後ろにいる、知能機械 A と人間 B と色々会話して、どちらが人間であるかを判定する、ただし、A は できるだけ B の真似をしようとする。もしも、どちらが人間かを見破れないときは A は知性があると判定する。

$\Downarrow$

知能があるかどうかを「　つき合って　」判定する

- 知性の有無を「　客観的性能　」により判定しない（できない）。
- 知性の有無を内部構造により判定しない（できない）。
- 知性の「　一般的・普遍的　」定義の放棄（無効性）。

プラスクワスの懐疑論

不定性を「　明らかにする　」議論（契機）

> 68+57 がこれまでやったたことがないときは、「68+57 = 5 のはずだ」という懐疑論者を反駁することができない。

要点

- 計算法の使い方は暗黙の了解に拠っている。
- 「　非常識な　」使い方により、$68 + 57 = 5$ を主張できる。

$\Downarrow$

具体的数の足し算の実行の根拠として、明示的規則を呈示することはできない

$\Downarrow$

> プラスの「　不定性　」

プラスクワスの懐疑論に対する誤解

- プラスのアルゴリズムを呈示すれば論破できる。
  しかしアルゴリズムの適用法の規則が明示されていない
- 「プラスについては暗黙の了解がある
  クワスのような規則は常識外れである。」
  しかし、特定のクワスを排除する明示的規則を**事前に**作ることはできない
- 「プラスの意味は数学的に確定しているが、その実践が問題になっている**だけ**で、数学にとってはどうでもよい議論である。」
  そうではなく、プラスが確実に使えることが先にあって、「プラスの意味が数学的に確定している」という考えが生じているに過ぎない。
- 「帰納法の色々な定式化を分析するのは数理論理学の基本的な問題である」
  そうではなく、色々な形式系を論じるときにメタレベルで使う「帰納法」が懐疑されている。

無限と $\langle$ 無限 $\rangle$

無限:　いつも次がある ($n \Rightarrow n+1$).

$\langle$ **無限** $\rangle$**:**　次々と辿れる。

これはプラスクワスの議論に耐え得ない

例

- 人口は $\langle$ 有限 $\rangle$ だが、社会は無限である。
- 俳句の数は $\langle$ 有限 $\rangle$ だが、無限である。（角田）

言語使用の逆理とその懐疑的解決

クリプキ

何らかの語で何らかの事を意味している、といった事はあり得ないのである。語について我々が行う新しい状況での適用は、全て、正当化とか根拠があっての事ではなく、暗黒の中における跳躍なのである。

言語使用の逆理

ではなぜ言葉は有効に使えるのか？

ウィトゲンシュタインによる懐疑的解決

プラスを人間は学習すればほぼ誰でも同じ結果をだせる、という状況が先にある。

$\Rightarrow$ 真理条件から $\boxed{\text{言明可能状況}}$ へ

なぜ懐疑的解決か？

言語の逆理自身が意味を失う。

規則で説明しなければならないという前提があったので逆理と見えた。

広義チューリングテストと契機システム

- プラスクワス議論より「 生命性 」は数学的に定義できない。
- 生命性の判定はチューリングテスト的にするしかない。⇒ $\boxed{\text{広義チューリングテスト}}$

実験の条件: $\boxed{\text{実験者との相互作用が可能}}$

例：足し算の実行はプラス概念のチューリングテスト.

$\boxed{\text{契機システム}}$
$\overset{def}{=}$ チューリングテスト可能な「 実験装置 」

例:

- 概念モデル・数理モデル（非写実的使用）
- 工学的対象（相互作用可能）・計算機実験（視覚的）・生物実験

契機系の例

- 計算機実験による契機系
  - Life game(Conway)
  - セルオートマトン (Wolfram)
  - 結合格子モデル (金子)
- 「２中心モデル」（三宅美博）
- 「実例を不可欠な因子として含む理論」（大野克嗣）
- 翻訳システム（柴田勝征）
- プロトバイオロジー（松野孝一郎）

数学的語り方の多様性

- 非有基的集合論（ 知識論理）

  $x \in x$ が可能：$\Rightarrow$ 様相論理のモデル

- 直観主義集合論排中律なし, 場合分け議論が出来ない

  – 離散力学系のトポス、動的関係

  – 総合微分幾何

    Koch-Lawvere 公理：排中律を使うと矛盾する

- 線形論理： 仮定は推論に 1 回だけしか使えない

  分散系の非決定的力学系（ 遷移系）の圏

  線形圏 monoidal closed cateogry with subobject classifier)

- 内的集合論（ 無限小解析）

  砂山パラド クス

- 圏論（ 非外延的な言語）

Chu 空間

目的　経験と言葉の関係は生の事実としたときに、どういうものが見えるか Chu 空間を用いて考える。

定義　$\langle X, S, R \subseteq X \times S \rangle$ を Chu 空間という。

記号　$x \models s \overset{def}{\iff} \langle x, s \rangle \in R$

使い方

- $X \ni x$ ：ある人の経験,
- $S \ni s$ ：その人の語彙,
- $x \models s$ ：経験 x が言葉 s に当てはまる,
  言葉 s が経験 x に当てはまる。

世界観と概念系のガロア対応

$$R \subseteq X \times S$$

$$x \models s \overset{def}{\iff} \langle x, s \rangle \in R$$

$$Y^* = \{ s \; ; \; y \models s \quad \forall y \in Y \}$$

$$Y \longrightarrow Y^*$$

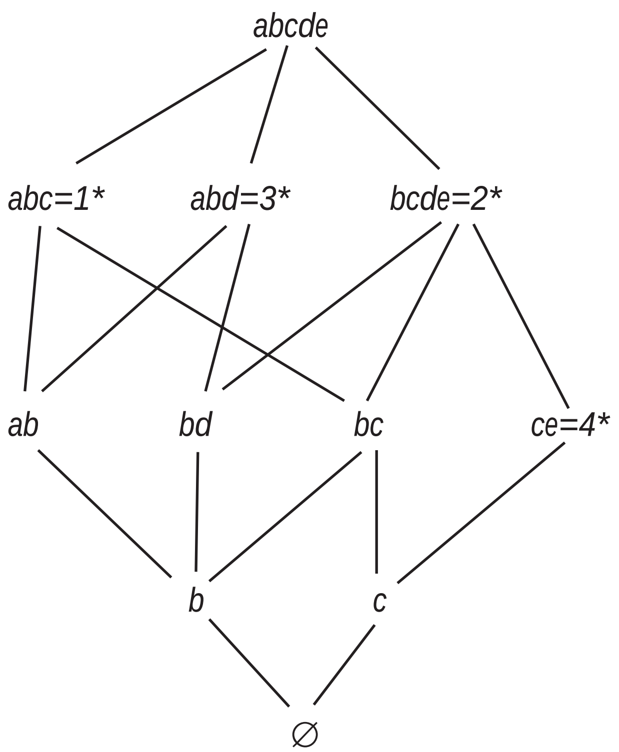
$$P(X) \qquad\qquad P(S)$$

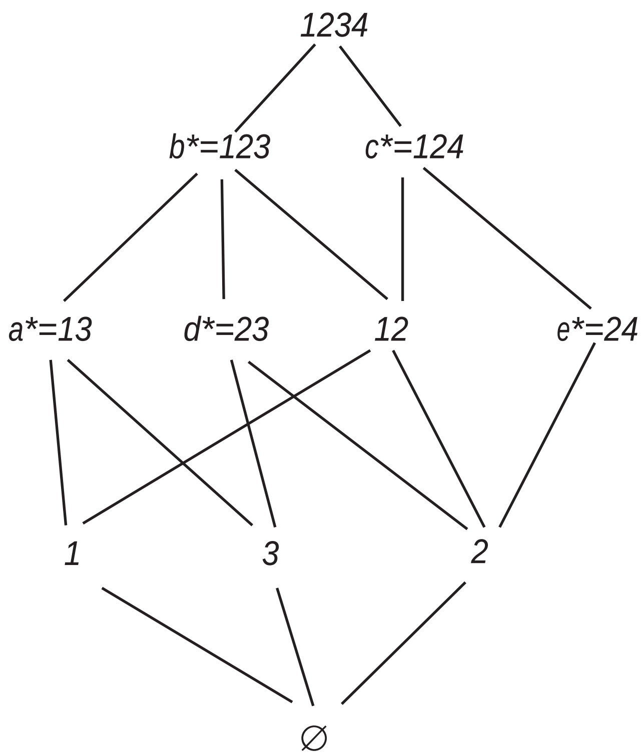
$$T^* \longleftarrow T$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ X & \simeq & S \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \{ Y \; ; \; Y^{**} = Y \} & & \{ T \; ; \; T^{**} = T \} \end{array}$$

例：Chu 空間と概念束

	a	b	c	d	e
1	x	x	x		
2		x	x	x	x
3	x	x		x	
4			x		x





世界観（概念系）の特徴

- 概念系 S は単純論理を持つ。
  - **単純論理:**　帰結関係 $\to$ が導入できる。

    $$s_1, s_2, \cdots, s_n \to t \overset{def}{\Longleftrightarrow} t \in \{\, s_1, s_2, \cdots, s_n \,\}^{**}.$$

    これは推移的有向ハイパーグラフとなる。
  - **論理積:**　$t \wedge s$ は $\{\, s, r \,\}^{**}$ で与えられる。
  - **論理和:**　$t^* \bigcup s^*$ は安定しているとは限らないので $t \vee s$ に相当するものはない:

    $$x \models t \vee s \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \models t \text{ または } x \models s.$$

  - **否定:**　s の当てはまらない経験全体は安定しているとは限らないので s の否定概念は必ずしも存在しない。
- 安定した事象・概念は 2 重に規定されている：外延的規定と内包的規定。
  - 事象と言葉のいずれが変化しても世界観は変化する。

契機系と意味論

数学的契機系は確定した意味を持ってはいけない!?

artifact とそうでないものとの区別がないにもかかわらず、モデルが実在化してしまう。

$\Downarrow$

契機系の望ましい条件：チューリングテストはそれ自身の制約を明らかにする

例

- チューリングテストを行う者が積極的に参与しないと意味がないもの。(e.g. 錯視図形、隠し絵)
- 何らかの非整合性を含み、全体の意味を与えつことができないもの。(e.g. エッシャーの絵)
- 深く考えると無限後退せざるをえないもの。(e.g. 数学化する前の数理論理学)
- anti-parsimony
  沢山のパラメータを含むモデルでパラメータ調整が本質的に重要であるもの

高次元圏

- 2対象が同型の判定法を explicit にする、という操作を続ける。異なる対象が「 同じ 」であるときは、同じとする比較操作が背景にある。

A, B が同型 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f : A \to B$ と $g : B \to A$ が存在し

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

この等号を同型に置き換えることが必要となる：

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_A \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_B.$$

写像の間の同型を定義するは、写像の間の写像が必要 ⇒ $\boxed{\text{高次元圏論}}$

こうして同型概念の定義は無限後退に陥る
⇒ これは内部観測の契機系を与える。

まとめ

- 「 不定性 」が生命科学の諸問題の核にある。
- しかし、不定性自身は直接には捉えられない。
  - 契機系を構成する以外には不定性へアプローチできない。
  - 契機系の条件
    - 具体的でありチューリングテスト可能であることが不可欠.
    - 契機系を「 写実的に使う 」ことが無意味であることが望ましい.
- 契機系構成の探索は、数学の新しい使い方をもたらし、新しい数学をもたらす。
- 数学自身も「 不定性 」の大海に浮かんでいる。数学の自由性

「まとめ」の誤謬

- 不定性は解消されてしまった！

  不定性を契機系構成により
  探究するという**基底**を設定した

- どこがまずいのか？

  プラスクワスの懐疑論から
  ⟨ 基底 ⟩ などあり得ない

- では何も得るものはないのか？

  ある．確定した基底を求めなくなる。

- それは積極的な意味のあることなのか？

  もともとプラスは基底なしに行われている

  $\Downarrow$

  基底という虚構から自由になることで
  初めて不定性に向かうことが可能となる。

科研費の新細目

基盤研究 (C)（ 一般）時限付細目
複雑系の科学（ 平成１１年度〜１３年度）

内容：物理学、工学、化学、生物学、地学、医学などの分野で、自然界における大規模な非平衡系の現象が研究の対象となりつつある。その極めて複雑でダイナミックな時間発展や、その結果として生じる多様な変容のありかたを解明する研究、ならびにその研究を体系化・普遍化するための手法に関する数学、計算機科学、情報分野の研究を対象とする。複雑系の概念と方法論は自然現象に留まらず、人間社会のダイナミックスの研究にも拡張される可能性がある。