1 内部観測

1.1 脳の数理について

問題 「脳の機能を数理的に解明せよ」

[1.1.1] この問いは疑似問題である。どう疑似問題であるかが重要である。

[1.1.2] この問は、別の問「心と脳の関係を明らかにせよ」と不可分である。そうすると「心を数学的に理解せよ」という問と無関係に考察はできない。

[1.1.3] これらの問いは一体どういうところで考える必要が生じるのか？知的好奇心か？重要性を持つ場の例としては神経心理学（主に脳損傷の病理の研究）がある。司法的な問題において重要な意味を持つ。個人的な世界観・価値観にも大きな影響を持つ。

[1.1.4] 脳という物質系の数理モデル（神経回路網などの力学系・確率過程・計算系）だけでは問いに答えられない。脳の機能の数理モデルも必要である。

(a) 脳を持つ人と、その人が生活している世界との関係において「脳の機能」を考えるようとしても、「世界の数学的モデル」・「人の数学的モデル」・「それらの間の関係の数学的モデル」はいずれも的外れなものと思われる。

(b) 一方、「脳の機能」を内省によって観察される＜心の内容＞としてと考えようとしても、「内省によって観察される心の内容」というものの数学的表現が問題となる。

(c) いずれにしても、脳の機能の記述には、脳はあらわれない。

[1.1.5] 脳の機能と脳との関係を問いたくなるのは、人が脳と心とを持っているという「現実の状況」があり、脳が壊れると挙動がおかしくなる、という経験的事実に基づく。しかし、その問いが何を問おうとしているかを調べ、それがもっと深い問題であることが明らかになれば、その問いは意味があったことになる。（擬似問題の疑似解決）.

[1.1.6] 「しかも心的な状態や過程の文法というものは、多くの点で、いわば脳の過程の文法に**似て**いる。主な相違は、おそらく、脳の過程の場合には、人が頭蓋をあけて当の過程を見るなりして、直接に検査することが可能だと認められていることにある。それに対して心的過程の文法においては、そうした「直接に知覚する」ということが問題にならない（その手順がこのゲームにはない）。」(ウィトゲンシュタイン. 全集 3,p104）

1.2 内部観測

「それにまた「規則」という言葉の使用規則は、超規則だというわけではない。」（ウィトゲンシュタイン.[IM:Wit1, 第 3 巻 p154]）

「私が言語に関する哲学的説明において、すでに言語をまるごと（すなわち予備的、暫定的なものとしてで

なくて）使わざるをえないということは、すでに、私は言語についてただ外面的なことがらしか述べ得ないということを示している。」（ウィトゲンシュタイン [IM:Wit1, 第３巻 p162]）

「言語のはたらき方の心理物理学的メカニズムとしての説明は、それ自身、現象（連想や記憶などの）を言語において記述したものである。それはそれ自身ひとつの言語的活動であって、記号操作の外部に位置している。われわれが必要とする説明は、**記号操作の一部**であるところの説明である。」（[IM:Wit1, 第３巻 p86]）

[1.2.1] 複雑系の科学でしばしば使われる「創発」「ミクロとマクロ」「複雑さ・詳記不能性」「構造と機能」「文脈」「多様性」「記述」「個別性と普遍性」「相互作用」等々の言葉で、何が問題となっているかは自明ではない。

[1.2.2] ウィトゲンシュタイン「哲学的文法」（ウィトゲンシュタイン全集 [IM:Wit1, 第３巻]）

(a)「理解という心的過程に関する事情は、３という算術の対象に関する事情と、似通ったところがある。一方の「過程」という言葉も、他方の「対象」という言葉も、われわれをして当の言葉に対して文法的に誤った**立場**をとらせる。」(p108)

(b)「フレーゲが算術の形式主義的なとらえ方に反対して言うところは、ほぼ次ぎのようなことである。すなわち、記号に関するこれらのこまごました説明は、われわれが記号を**理解している**なら、余計なものだ。そしてこの理解とは、いわばひとつの像を見ることのようなものだ。その像からすべての説明が帰結するのであり、それを見ることで諸記号が理解される、というのである。しかしフレーゲは、この像そのものが、ふたたび一つの記号であろうこと、あるいはそこに書かれている記号操作を説明するところの一つの記号操作であろうことを、見ていないと思われる。」(p40)

(c)「科学や数学が多くに文を使いながら、それらの文の理解について何も語らないのは、思えば妙なことである。」(p40)

[1.2.3] 発言の真偽を問うのではなく、発言が無意味でない状況（言明可能状況[1]）を分析する。

[1.2.4] 学問における内部観測的様相とは、研究対象が研究者の行為や意図と不可分であることをいう。

[1.2.5] 通常の考え：『科学でも当然内部観測的様相があり、それを排除することは容易ではない。その様相の影響をなくせたものだけが科学的結果である。』

[1.2.6] 観測志向型研究：内部観測的様相を重要な因子としてすべてを考えそう。

[1.2.7] 観測志向型研究は外面的には懐疑の方法をとる。

(a) 懐疑の対象は、真理ではなく基盤である。

(b) 観測志向型研究では、通常「基盤」と考えられているものも観測法の一つと考える。

(b–i) しばしば問題自身が疑似問題であることを指摘する。

(b–ii)「形式」自身が懐疑される。（数や文字列なども懐疑される。）これはプラスクワスの懐疑論で表現される。

(b–iii) プラスクワスの懐疑論 [IM:Kr]:「始めてする２つの数の足し算の結果を正当化することは

[1] これをウィトゲンシュタインは言語ゲームということがあるが、この言葉は誤解しかされていない。

できない」（規則の適用規則がない）。

[1.2.8] 観測志向型理論は実在論の立場をとらない。

(a) 言明の真偽を問わず、その言明の真偽を問うことの使い道を問題とする。あるいは、その真偽の答え方を問題とする。

(b) 実在論の立場をとらない、という言い方は誤解されやすい。この資料が実在するわけではない、というようなことを言うのではない。この資料について有益なことはいくらでも言うことができるが、「この資料が実在する」という文が無意味で、使い道がないのではないかと懐疑するのである。

[1.2.9] 不定性は不可避であると考え、確定しようとしない。

(a) 「確定」というものが明確にあるわけではないと考える。

(b) しかし「＜すべては＞不定である」というような一般的なことを主張しているわけではない。これは「不定性が実在する」という主張になる。

[1.2.10] 個別と切り離された「一般的・普遍的言明」はないと考える。

(a) 特殊な個別的なもの・例だけを重視する、ということではない。

(b) 個別的なものを捕らえるときに少し外側が必要である。「少し外側」がいつの間にか＜全体＞となってしまうところに用心するのである。

[1.2.11] 観測志向型研究の成果は「契機」[IM:G1] で表現される。

(a) 通常基盤であるとすら意識されない「自明なこと」が問題となっているため、通常の枠組みで内容を直接に表現すること自身が意図と調和せず、的外れになる。

(b) 「契機」は逆理が積極的に利用される。

1.3 数学における不定性

[1.3.1] 数学は内部観測に支えられている。それは数学の至るところに不定性があることを意味する。

[1.3.2] ここでいう不定性は「不確定性」とは違う。選択肢が確定しているが、その中のどれかは決まっていないという状況（非決定的）は、一つメタレベルに移れば確定する。内部観測的不定性はどのレベルでも確定するということがない。

[1.3.3] 自然数列の全体の概念は確定しているとは言えない。これより有限／無限の区別が明確でなくなる。

(a) 砂山のパラドクス (Sorties Paradox)[IM:Hy]

1 個の砂粒は砂山ではない。n 個の砂粒が砂山でなければ $n+1$ の砂粒も砂山ではない。ゆえに帰納法により、すべての n について n 個の砂粒は砂山を形成しない。

(b) Essenin-Volpin の Ultra-intuitionism[IM:V]:10^{12} に達しない自然数列。

(b–i) Volpin が懐疑すること：

T1 The uniquness (up to isomorphism) of the natural number series,

T2 The existence of the values of primitive recursive functions (prf) for every system of arguments for an arbitrary natural number series,

T3 The principle of mathematical induction from n to n',

T4 If the axioms of a formal system are true and the rules of inference conserve the truth then each theorem is true,

T5 The meaningfulness of the relations of identity and distinctness,

T6 The possibility of neglecting modalities and aims in foundations of mathematics,

T7 The possibility of neglecting tenses, voices and moods of verbs,

T8 The possibility of neglecting the rules of attention and neglecting.

T9 The hypothesis of potential feasibility,

T10 The division of theories into object theories and metatheories.

T11 The postulates of the intuitionistic predicate calculus.

(b–ii) 自然数のペアノの公理系の非標準的モデルの存在と関係あるように見えるが、ここでは超準数学を支えているような形式系という基盤自身が問題になっている。

(b–iii) 数の記法は数の観測装置と見なせる。観測装置ごとに自然数列がある。「観測装置ごとに自然数列の一部が見える」とは言えないとするのが内部観測。

(b–iv) これより、$\forall x \in \mathbf{N}[Px]$ という表現の意味が不定となり帰納法

$$P(0) \wedge \forall x \in \mathbf{N}[P(x) \rightarrow P(x+1)] \rightarrow \forall x \in \mathbf{N}[P(x)].$$

自身が無意味となる。ここでは、公理化等、記号論理学を支えている素朴な帰納法自身が不定となる。

(c) 最大数のある自然数列 [IM:Tn3].

(d) ウィトゲンシュタイン [IM:Wit2]：「π の十進展開に 777 が現れるか否か」は問題として成立していない。」

[1.3.4] 帰納法が不定になるので、『推移的閉包』という概念が不定になる。集合 X 上の 2 項関係 $R(x,y)$ があるとき、R の推移的閉包 $R^*(x,y)$ はある自然数 n があって、

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n [R(x,x_1) \wedge R(x_1,x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1},x_n) \wedge R(x_n,y)],$$

と書けるが、「ある自然数 n があって」の意味が不定。

[1.3.5] 推移的閉包が不定になることから、形式言語の規定・証明概念の形式　化などの紛れのないと思われている概念装置が不定性を持つものとなってしまう。これより「隠れた矛盾」が無意味となる [IM:Wit2]。

[1.3.6] 数学的対象はふつうモノとしては決まらない。したがって数学的操作の結果はモノとしては決まらない。

[1.3.7] 例：群論は同型類しか問題にしない（できない）。群の積は同型類しかきめられない。

(a) 群の直積の定義

$$G \times H := \left\{ (g,h) \;\middle|\; g \in G, h \in H \right\}$$

は本質を表現できていない。

(b) 対 (g,h) は集合論的には $\{\{g,h\},h\}$ や $\{g,\{g,h\}\}$ などいろいろな実現がありえるが、どれも同型なのでどれをとってもかまわない。

(c) 「どれも同型なので」という理由は退化している。どういう点「どれをとってもかまわない」かの分析が積の本質を明確にする。

(d) 積を、構成の仕方と独立に把握するには、H, K との関係を情報として入れなければならない。

(e) 圏論的な積の定義：積概念は、群に G, H との関係を加えた 3 組 $\langle K, \pi_G : K \to G, \pi_H : K \to H \rangle$ が G, H の積錐であるとは、他の同様 の 3 組 $\langle K', \pi'_G : K \to G, \pi'_H : K \to H \rangle$ があれば、ただ一つの群準同 型 $f : K' \to K$ があって、$\pi'_G = \pi_G \circ f$,$\pi'_H = \pi_H \circ f$ が成り立つ.

(f) $G \times H$ という表記は、同型類の中から一つ選んでいることを意味するが、選び方は不明なこと、G, H との関係は構成法に隠ぺいされていること、など適切ではない。

(g) 3 つの群 $G_i i = 1, 2, 3$ の積も同様に定義され、それを 2 つの群の積を通して表示することとは分離できる。

[1.3.8] 例：選択公理。$f : X \to Y$ が全射ならば、右逆 $g : Y \to f$ がある：$f \circ g = 1_Y$.

(a) 全射は個別的な性質（$y \in Y$ ごとに $fx = y$ が解ける） であるが、これが大局的な解 g: $\forall y \in Y[fg(y) = y]$ というのが選択公理。一つ一つはどれでも処理できても、すべてを一挙に処理する方法 g があるということとは「かなり」違う。

(b) 無限的な数学的存在の多くは選択公理によって産み出される。e.g. X が無限集合のとき、定数写像 $f : X \to Y$ 以外のものは選択公理によって定義される。特に、X の部分集合のほとんどは選択公理なしには存在はわからない。

[1.3.9] coherence の問題：選択を整合的に行うには注意が必要。