高次元圏論の概要と意義[1]

— 複雑系の数理の文脈で—

北海道大学大学院理学研究科
辻下　徹
tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp

序　「複雑系研究」の進展は従来の自然科学の延長線上には望めないと思われるが、その理由の一つは「複雑系研究」では内部観測の様相が捨象できないことにある。この様相は誤解を恐れずに言えば、研究行為自身が研究内容と不可分であるという様相であるが、「それは自明な様相だ、だからこそ、それを分離しえた科学の諸成果ははかり知れない意義がある」というのが現在の自然科学の立場であろう。しかし、複雑系研究の場では、生命の理解には内部観測を捨象し得ないという認識は広がりつつある。内部観測を捨象しないという決意は、学問的にはこれまでになかったような性質の厄介な問題をもたらすが、この問題こそが生命理解の困難の核心であると考えられなくもない。

数学の形式は一見すると内部観測とはおよそ相容れないものと思われる。実際、数学的表現が与えられるものこそ客観性の目印とさえ考えられている。ところが、実際の数学的議論を見るとき、数学的対象はいつも同型を除いてしか定まっていない、という重要な様相が浮かんでくる。ふつうは単なるインフォーマルな注意として述べられるこの様相は、数学の隠れたある重要な本性を示唆する。同型を除いてしかモノが定まらない、という主張を徹底することから、最近急速に発展している高次元圏論を考えざるを得なくなるが、この高次元圏論が明るみにだすこと——数学には解消できない不定性が根底にあるということ——は＜内部観測を捨象しない数理＞へ自然につながっていると思われる。

目 次

1　複雑系研究の現状についての私見

複雑系の諸問題の核心は「複雑性」ではなく「基盤の不定性」にある。これが松野 [IM:Mat1] が発見し郡司 [IM:G1, IM:G2] が開拓した内部観測論の主張である。

[1] http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/tjst/993jaist.html

この「不定性」は「渾沌」「非決定性」「不確定性」「あいまいさ」「不安定性」などとは異質なものであり、通常の数理的取扱とは相性が悪い。

例をあげよう。

各生物個体は明確な形態と行動様式を基盤として生存している一方、「基盤に対する懐疑」あるいは別の表現をすれば「基盤から自由であること」が生命的様相の核心にあるように見える。ところが、「基盤からの自由」がどういうものかを明らかにすることには、その逆説性ゆえの質的困難があり、この困難が「生物の理解」の困難の核心をなしている。

この「逆説性」はたとえば次のような事情に現れる。

「基盤からの自由」の数理モデルを作ろうとすると「その基盤」を記述する別の、より深い基盤を設定することになる。もしも、この深い基盤によって議論がうまくいったとすると、意図したことと逆のこと「生物が基盤から自由と思ったのは実は基盤概念がまずかったからだ」ということを示しただけになってしまう。

この逆説性は、新しい研究法（例えば構成的方法）や議論の仕方の多様な模索の原動力となっていると思われる。

この逆説性を適切に了解する道は、ウィトゲンシュタインが発見した新しい明証性にある。この点をまず説明したい。

1.1 デカルト的明証性からウィトゲンシュタイン的明証性へ

デカルトが見い出した「明証性」は自然科学と数学の基盤を成している。

> 示された対象について、他人が考えたところあるいは我々自ら憶測するところを、求むべきではなく、我々が明晰かつ明白に直観しまたは確実に演繹し得ることを、求むべきである。（デカルト「精神指導の規則」）

ここに表明された明証性についての感性（およびそれがもたらす建設的懐疑の態度）を身につけることはかなりの「修行」がいることであるが、数学や科学に携わるものに取って不可欠なものの一つと言えるだろう。その後の自然科学の歩みはその効力を明確に証明した。この明証性に何の問題があるのだろか。

パスカルに「デカルト、無用にして不確実」と言わせたものが何であったか、それが今問題になっている。デカルトが世界の解明にその「明証性」を徹底することで到達したところが「人間機械論」であった。これは当然の経過とも思える。そしてその行路を人類の全体が今辿っているとさえいる。大脳生理学は心を脳機械によって説明しようと目指し、分子生物学は生命を分子機械によって説明しようと目指している。デカルト的明証性は人類の知的基盤となっている。

ウィトゲンシュタインはデカルト的明証性とは全く異質な明証性を発見した。パスカルの指摘は、デカルト的明証性にはウィトゲンシュタインの明証性が欠けているという洞察と解釈することが可能である。

ウィトゲンシュタイン的明証性の本質を考えるきっかけとして次ぎの一節を引用しよう。

> 「言語のはたらき方の心理物理学的メカニズムとしての説明は、それ自身、現象（連想や記憶などの）を言語において記述したものである。それはそれ自身ひとつの言語的活動であって、記号操作の外部に位置している。われわれが必要とする説明は、**記号操作の一部**であるところの説明である。」（[IM:Wit1, 第 3 巻 p86]）

ここでウィトゲンシュタインが「記号操作の一部であるところの説明」という表現で言おうとしていることを説明してみよう。

例１:無限　Zermelo-Frenkel の集合論の無限公理は記号列

$$\exists x[\emptyset \in x \wedge \forall y[y \in x \Rightarrow y \cup \{\ y\ \} \in x]]$$

によって無限集合の存在を主張する。しかし、この記号列自身は無限と何のかかわりもない、すなわち、無限に対するこの表現は記号操作の外部にある。それに対し、我々は異なる記号いくらでも用意できることに無限の本質があるという説明を考えると、これは実際の記号操作の本質に無限が既に現れていることを指摘するものといえる。これは記号操作の一部である「説明」である。

> 私の無限の説明は再三再四無限それ自身によってのみ可能なこと、すなわち、無限は説明できないこと、このことはなんら驚きではないのである。(([IM:Wit1, 第 2 巻 §138]))

デカルト的明証性はまさに、記号操作の外部においてものごとを説明する、というところに成り立っていて、記号操作自身の本性は説明しようとすることの外部にある。

例２：同一性　もう一つの例は、「同じ」と「違う」を記号が同じであることと、記号が違うことによって表現することある。ウィトゲンシュタインは「論理哲学論考」で等号「=」は不要な枠組みを呈示している。そこでは、$x = y$ という式はあり得ないし、$x = x$ は無意味である[2]。これは、「同じ」ということを、記号が同じという記号操作の中で表現している。 $x = y$ という式を許すことは、x, y が同じかどうかを記号操作の外部の仮構された「同じ」という基準にゆだねることになる。

[2] ここでは関係としての等号だけを問題にしていて、書き換え規 則をあらわすものとしての等号は問題にしていない。

例３：意味　言語の意味の説明の典型は、形式言語と呼ばれる意味を持たない記号系と、集合論のような意味世界を用意し、「解釈」によってその間を繋ぐことで行われる。ところが「解釈」の実体は、最初の記号系を、ZF 集合論（や圏論）のような別の記号系に変換する、という記号操作になっている。ところがこのメタ記号操作自身は「自明のもの」として仮定されていて、当の意味説明の作業の外にあり隔絶している。逆にいうと、この作業によって与えられたとされる「意味」は、その作業の本体である我々の記号操作の外部にあると言ってよい、というのは、こういう「意味」の説明は、その説明における記号操作の本性とは何のかかわりもない。この説明にはウィトゲンシュタイン的明証性がない。

「これが言葉の意味の本質である」という説明は、その形式によってウィトゲンシュタイン的明証性に欠けていることになる。意味に対するウィトゲンシュタイン的明証性を持った説明は、言葉の使用の多様な様相に言及することでしかなされない。ウィトゲンシュタインの多くの著作が、言葉の意味についての明証性を持った説明を成している。ちょうど無限が明示的に指示できず、記号操作の本性にあることを指摘するしかなかったと同じように、意味の説明も、我々の記号操作（この場合は言語活動）の多様な様相を具体的に指摘することが「記号操作の一部であるところの説明」になっており、「その一般的様相」を抽象化して「これが意味の本質である」というときは、すでに記号操作の外に出てしまっているのである。

誤解　このように、ウィトゲンシュタインは、語る言語自身そのものにおいて実現されていないものは明証性に欠けると考えるのである。

しかし、この明証性自身は自明な明証性ではないために、誤解の壁に幾重にも取り囲まれている。

たとえば、次のような誤解は自然に起こる。「その明証性は一般化や抽象化を無意味とし、具体性以外は無意味とする粗野な明証性ではないか。」

ウィトゲンシュタイン的明証性が粗野なものでないことを指摘するのは容易である。むしろ、ウィトゲンシュタイン的明証性に欠ける言明こそ粗野である。例えば、「一般化」や「抽象化」という心的操作の無限の多様性を具体的に見ないでこれらの意味が確定しているということを基盤にしてしまって、「一般化や抽象化を無意味とする」という言葉使いに疑問を持たないという点が明証性に欠けると考えるのである。

また、ヒルベルトの有限主義やブラウアーの直観主義と同じと考える誤解も自然である。しかし、ウィトゲンシュタインは「主義」はなんであれ、主義であるということそのものによって、記号操作の外部にあることを基盤とすることになり、明証性を欠いている、と考える立場である。

また、一方では「言語（や精神活動）は実生活におけるその有用性や実効性を基に理解されなければならない」というようなプラグマティズムや行動主義と誤

解されることもある。しかしウィトゲンシュタイン自身は「自然史」自身に興味を持たない。自然史を基盤とする説明自身が、既に目下の言語操作の外部にある説明だからである。

なお、ウィトゲンシュタインへの多様な誤解は以上のような簡易コメントで解決されるような浅いものではないことはいうまでもない。そもそも、この概要自身がウィトゲンシュタイン的明証性を持っていない。この概要では、ウィトゲンシュタイン的明証性は概要における議論の外部のものとして説明してしまっているからである。

1.2　科学におけるウィトゲンシュタイン的明証性

以下では、ウィトゲンシュタイン的明証性を基盤とする研究として、内部観測（存在論的観測）を考察してみたい。

科学の本質は「懐疑」にあるとしばしば表明されているが、懐疑には２種類ある。ある基盤の中での懐疑と、基盤自身への懐疑である。これらの間には厳密な境界はないが、内部観測の核心をなす「基盤の懐疑」のためのマニュアルは、その本性上ありえないために、稀にしか見られない。

「基盤への懐疑」が困難な理由の一つは、基盤は、まさに懐疑の余地がないように思われるものに他ならない点にある。そのために基盤であると意識されることすらない。このように「基盤への懐疑」は一見すると語義矛盾的様相があるために困難を伴う作業となる。

科学の歴史は基盤の大きな変化に満ちている。極端な例はブルーノによる宇宙、ニュートンによる力学、非ユークリッド幾何学による幾何学の相対化、ダーウィンによる「種の不変性」という基盤の懐疑、フロイドによる精神の相対化、ウィトゲンシュタインによる自然数・記号系の不定性の発見[3]など。

しかし、内部観測の立場を徹底すれば、内部観測の基盤自身もおかしくなり、自己矛盾に陥らないだろうか。この矛盾は「認識論的姿勢」（時間に依存しない＜永遠の真理＞を得ようとする姿勢） では不可避である。

内部観測は何も恒久的な「基盤」とは考えないが、一時的基盤を拒否するものではない。内部観測の立場では一歩先の見通ししかたてられないと考える。ふつうは一歩先の見通しに過ぎないものをすべてを見通していると勘違いしているのだと考える。その先は、この一歩先の見通しが現実化した段階ではじめてさらに一歩先が見通せると考える。

上のようなことは、通常の科学研究の様相と何も違わないように見える。しかし、似ているのは内部観測の立場もやはり疑似基盤であるという点だけであり、具体的には根本から違う。これまでの科学研究の自明な基盤として意識すらされて

[3]ゲーデルによる不完全性定理には「形式系」という基盤の有効性への懐疑はあるが「形式系」という基盤そのものへの懐疑はない。

いなかった記号系と論理の確実性自身がウィトゲンシュタイン的明証性を持たないことが明らかになった以上、様々なところで根本から再構築することが必要となる。その再構築の先に何があらわれるかは今のところ見通せない。

ウィトゲンシュタイン的明証性をもたらすには、たとえば、言明の真偽を問わず、言明の真偽を与えている基盤・状況に目を向けなければならない。（これをクリプキは「真理条件」から「言明可能条件」への移行と表現した。）また、種々の状況にあらわれる不定性を確定しようとすることはウィトゲンシュタイン的明証性に欠けることである。

なお、ウィトゲンシュタイン的明証性を持つ表現は容易ではない。少なくともこの講演概要はそれを持っていはいない。通常、基盤であると意識すらされていない「自明なこと」に問題の根源がということが主題となっているため、通常の枠組みで直接に内容を表現すること自身が意図と調和せず的外れになる。ウィトゲンシュタインの著作の非体系性は、ウィトゲンシュタインの主張と調和している。

2　数学における内部観測

数学におけるこれまでの基盤のいくつかはウィトゲンシュタイン的明証性を持たない。

数学における不定性　数学でも不定性がいたるところにある。ここでいう不定性は「不確定性」とは違う。選択肢が確定しているが、その中のどれかは決まっていないという状況（非決定的）は、一つメタレベルに移れば確定する。内部観測の視点が明らかにした不定性はどのレベルでも確定するということがないものである。

自然数の不定性　驚くべきことに「自然数の全体」はウィトゲンシュタイン的明証性を持たない。これより有限／無限の区別が明証性を失う。このことを納得するのに砂山のパラドクス (Sorties Paradox)[IM:Hy]

> 1は具体的に指示可能である。nが具体的に指示可能であれば $n+1$ もまた具体的に指示可能である。ゆえに帰納法により、どの自然数も具体的に指示可能である。

が有効であることもある。

またロシアの数理論理学者 Essenin-Volpin の Ultra-intuitionism[IM:V] は、10^{12} に達しない自然数列があると考える[4].

[4]Essenin-Volpin は次ぎを懐疑した：

T1　The uniquness (up to isomorphism) of the natural number series,

これは、ペアノの公理系の非標準的モデルの存在と関係あるように見えるが、ここでは超準数学を支えているような形式系という基盤自身が明証性を失っている。非標準的モデルの存在やゲーデルの不完全性定理などによる自然数の不定性の説明は、「我々の記号操作の外部に位置している」。これに対し記号操作の一部としては「自然数の集合」自身は「可能性」に関わっておりその不定性は「自明」である。

数の記法ごとに自然数列の可能性が成長（変化）するのであり「数の新しい記法が観測装置となって自然数列の新しい部分が見える」というわけではない。また、＜人間の認識能力の微小性＞などとは何の関係もない。

このようにして、自然数集合の確定はウィトゲンシュタイン的明証性を持たない。そのために、$\forall x \in \mathbf{N}[Px]$ という表現の意味が不定となり帰納法

$$P(0) \wedge \forall x \in \mathbf{N}[P(x) \rightarrow P(x+1)] \rightarrow \forall x \in \mathbf{N}[P(x)].$$

自身 が無意味となる[5]。ここでは、公理化等、記号論理学を支えている素朴な帰納法自身が不定となる。

帰納法が不定になるので、『推移的閉包』という概念が不定になる。集合 X 上の 2 項関係 $R(x,y)$ があるとき、R の推移的閉包 $R^*(x,y)$ はある自然数 n があって、

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n[R(x,x_1) \wedge R(x_1,x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1},x_n) \wedge R(x_n,y)],$$

と書けるが、「ある自然数 n があって」の意味が不定となる。

推移的閉包が不定になることから、形式言語の規定・証明概念の形式化などの紛れのないと思われている概念装置が不定性を持つものとなってしまう。これより「隠れた矛盾」が無意味 となる [IM:Wit2]。

なお Beck[IM:B] は、simplicial set による数学の現実化を試みがある[6].

T2 The existence of the values of primitive recursive functions (prf) for every system of arguments for an arbitrary natural number series,

T3 The principle of mathematical induction from n to n',

T4 If the axioms of a formal system are true and the rules of inference conserve the truth then each theorem is true,

T5 The meaningfulness of the relations of identity and distinctness,

T6 The possibility of neglecting modalities and aims in foundations of mathematics,

T7 The possibility of neglecting tenses, voices and moods of verbs,

T8 The possibility of neglecting the rules of attention and neglecting.

T9 The hypothesis of potential feasibility,

T10 The division of theories into object theories and metatheories.

T11 The postulates of the intuitionistic predicate calculus.

[5] より正確にいうと、$P(0) \wedge \forall x \in \mathbf{N}[P(x) \rightarrow P(x+1)]$ 自身は我々の記号操作の中にある。これを $\forall x \in \mathbf{N}[P(x)]$ と表現することには意義がないという立場である。

[6]「帰納法」は homotopy lifiting property によって実現されると考えられている。

高次元圏の意義　高次元圏では操作の不定性が記号操作の一部として表現されている、ということができるように思われる。

- 等号は徹底して（書き換えや代入）操作と考える（操作としての等号以外を用いない)。
- 推移的閉包自身も具体的記号操作として表現される。
- 「書き換え」や「代入」自身の効果も、ある高次元胞によって具体的に表現される。

「書き換え」操作の繰り返し自身に理論的にも不定性があることを明確に展開することは、生物の進化の適切な理解には必要と思う。

3　高次元圏論の概要

弱高次元圏論の決定版はまだないと言ってよい。きょうは、複雑系研究の文脈からの要請に重点を置いた、高次元圏の一つの定式化を紹介したい。

3.1　背景

弱高次元圏論の必要性：等号の排除　ここでは弱高次元圏というものが必要になる理由として以下のものを取り上げたい。

圏論が集合論と決定的に違う点の一つは「同じ」という言葉を議論する手段を用意していない点にある。集合論では外延性公理が与えられた2集合が同じかどうかを検証する方法を提供しているが、圏論では2対象が同じかどうかを検証する方法はない。その代わりに、2対象が同型かどうかを検証することができる。米

---

p115 We thus take $\Delta(n)$ as our finite model of the natural number object and use the homotopy lifting property to perform finite recursions.

p121 The somewhat accidental and arbitrary separation of problem from solution, which is characteristic of classical methods (and bridged by proving theorem with general hypotheses), does not seem to be a feature of the simplicial. A complete simplicial description contains in itself a feasible solution.

p122 Usually we emphasize the construction of ideal models (say, classical dynamical systems) and existence theorems for ideal solutions. Unfortunately, in practice ideal solutions are often uninformative. Only when this point is reached do we resort to simplicial models in the guis of numerical methods to obtain concrete information: (Diagram ommitted) Rather than consider simplicial models as *approximation* to ideal analytic truth, we propose to regard them as *the basic objects of study.*

田の補題は外延性公理の圏論版ということができ、これが圏論の多くの議論において２対象の同型性を検証する方法を与える。

圏論において「２対象が同じか否か」を議論できないことは圏論の弱点なのではなく、かえって圏論が数学の基盤として適切であることを示している。この主張は、一見すると理解しにくいかもしれないが、数学においては対象を定めるときにはいつも同型の不定性は排除できないということを思い起こせば当然のことである。数学では固有名は存在しないのである。

「２つのモノが同じかどうか」を語ることは数学では無意味である、という点を徹底しようとすると、圏論では不十分であることがわかる。圏論の多くのところで等号が使われ、また、対象の確定が使われている。

公理 結合律 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ や恒等律 $1_A \circ f = f = f \circ 1_B$ において２つの見かけは違う射が同じであることが主張されている。

合成 それ以前に、２つの射 f, g から、合成という操作で別の射 $f \circ g$ が確定することが要請されている。

恒等射 また「恒等射」1_A という固有名を持つものが規定されている。

すると、等号の排除を徹底すると、射の間の「同型」

$$\alpha : f \to g$$

という語彙が必要になる。そして、同型自身は、$\alpha \circ \beta = 1_f, \beta \circ \alpha = 1_f$ を満たす

$$\beta : g \to f$$

が存在すると定義されるが、ここで、等号や、固有名 1_f を持つものが登場してしまう。

さて、結合律と恒等律の等号だけを排除したものが双圏 (bicategory) であるが、それ以外の等号や確定は許している。

しかし、合成が確定する、という不自然な想定を排除しようとすると、双圏でも不十分である。そのためには

$$U : f, g \to k$$

のように f, g の**一つの**合成 k を与える２胞 U 達を 導入することになる。この場合でも k を与える U がただ一つ定まるわけではない、ということが重要である。

こうして、公理における等号を同型に弱めることと、合成の不定性を取り入れるために２次元胞が必要となる。しかし、２次元胞の同型の定義や合成の不定性を表現するには、３次元胞が必要となる。以下同様。こうして、現実には存在しえない「確定」操作を仮構しない限り、ある次元で話しを完結することはできないことになる。

高次元胞の形態　さて、高次元圏論の一つの技術的な困難は、高次元胞を具体的に記述するところにある。これまでの定式化では、基礎となる高次元胞の形態には制限がある。もっとも強い制限が Batanin[WnCat2:Bat] によるもので、これは globular な形に限っている。次は Baez-Dolan[WnCat1:BD1] による tree 型のものと、Tamsamani-Simpson[WnCat3:Ta, WnCat3:Si] による multi-simplex の形によるものである。いずれも、実際に 2 次元論で使われている一般的 pasting diagram は informal なものとしてしか表現できない。きょうお話するのは形態に何も制限を付けないものであるが、これによって、記述は単純化され見通しのよいものとなる [WnCat4:Tj5, WnCat4:MT]。高次元圏が数学の基盤となるべきだという立場からすれば、その定式化はなるべく単純なものであることが望ましいが、すべての場合に適した単純なものがありうるかどうかは、今のところ予想できない。

3.2　用語と記号

木の用語　T：木, o_T:root, Child(t):$t \in T$ の子の全体, $T[n]$:深さ n の頂点の全体, T^t: t の子孫のなす部分木, $\mathcal{T}$:有限分岐木と木同型のなす groupoid.

語の圏　$\mathcal{C}$:圏.

- $\mathcal{C}$-語とは対象の有限族：$w = (w_i)_{i \in |w|}$ (w_i:$\mathcal{C}$-object, $|w|$:添字集合)
- $\mathcal{WC}$:$\mathcal{C}$-語の圏. 射 $f : w \to u$ は bijection $|f| : |w| \to |u|$ と iso $f_i : w_i \to u_{|f|i}$ からなる。
- 語の併置作用 $\mathcal{WWC} \to \mathcal{WC}$ は

  $$(w_i)_{i \in |w|} \qquad (w_i = (w_{ij})_{j \in |w_i|})$$

  を $(w_{ij})_{(ij) \in \coprod_{i \in |w|} |w_i|}$ に対応させる。

リンクの圏

- 有限 groupoid I が**リンクの型** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ I の involution は、その逆以外の involution とは合成できない (involution:自明でない射のこと). I の対象が external $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ involution の source とはならない.
- $w = ((w_i)_{i \in |w|}, (w_m : w_i \to w_j)_{m: i \to j \in |w|})$ が $\mathcal{C}$-語 $(w_i)_{i \in |w|}$ **上のリンク** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $|w|$ はリンクの型で $w : |w| \to \mathcal{C}$ は函手. 同型 $w_m : w_i \to w_j$ をリンク w に属する involution という。
- $\mathcal{LC}$ を $\mathcal{C}$-リンクの圏. $\mathcal{LC}$ の射 $w \to u$ は、リンクの型の間の同型 $|f| : |w| \to |u|$ と、自然変換 $f : w \to u \circ |f|$.

- forgetful functor: $\mathcal{LC}\to\mathcal{WC}$.
- w が閉じたリンク $\overset{def}{\iff}$ $|w|$ が external な対象を持たない.

殻

- $S=(T,\left\{\ \sigma_x\ \middle|\ x\in T\ \right\})$ が殻 $\overset{def}{\iff}$ **(i)** T は木 **(ii)** σ_x は 木の語 $(T^t)_{t\in T^x[2]}$ 上のリンク**(iii)** $t\neq o_T$ のときには σ_t は閉じている. **(iv)** σ^t に属する木同型 $\rho:T^u\to T^v(u,v\in T^t[2])$ は u の子孫 w のリンク σ_w から v の子孫 $\rho(w)$ のリンク $\sigma_{\rho(w)}$ への同型を引き起こす.
- 殻が n 次元 $\overset{def}{\iff}$ T の高さが n.
- 殻 S が閉じている（開いている） $\overset{def}{\iff}$ σ_{o_T} が閉じている（閉じていない）。CSh_n 閉じた n 次元殻の集合. Osh_n 開いた n 次元殻の集合。
- 閉包：$Osh_n\ni S\mapsto\overline{S}\in Csh_n$.
- 形式的合成 $Osh_n\ni S\mapsto c(S)\in Csh_{n-1}$.

殻のラベル付け　$\Sigma_0,\Sigma_1,\cdots$ をラベル集合とする。

- 殻 $S=(T,\{\ \sigma_x\ \})$ の labeling $\overset{def}{\iff}$ 次数を保つ partial map $\lambda:T\to\Sigma$ ($|\lambda|$ が定義域). （ただし、$T[k]$ の次数は T の高さ $-\,k$ とする。）
- (S,λ) が Σ 上の n-枠 $\overset{def}{\iff}$ S は n-閉殻で $|\lambda|=T\setminus\{\ o_T\ \}$.
- (S,λ) が Σ 上の n-結合図式 $\overset{def}{\iff}$ S は $n+1$ 開殻で $|\lambda|=T\setminus\{\ o_T\ \}$.

ハイパーグラフ

- $(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\cdots,\delta)$ がハイパーグラフ $\overset{def}{\iff}$
  - $\mathcal{H}_0$:groupoid
  - $\delta:\mathcal{H}_n\to Frame_n(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1})$. ただし、$Frame_n(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1})$ の要素は $\mathcal{H}$ 上の n-枠に**整合データ**を付加したもの。ただし、$\mathcal{H}$ 上の枠 $w=(S_w,\lambda)$ の整合データとは、各 k-node t に対し**同型**

$$\rho_t:\delta(\lambda(t))\simeq(S_w^t,\lambda|S_w^t)$$

を指定するもの (この定義は再帰的)。

- 開殻の形式的合成は

$$OFrame_{n+1}(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_n) \to Frame_n(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1})$$

を定める。ただし $OFrame_{n+1}(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_n)$ は $\mathcal{H}$ 上の $n+1$-結合図式に整合データを付加したもの。これにより、$Frame_n(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1})$ 上の圏の end-ofunctor

$$OFrame_{n+1}(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1},\bullet)$$

が決まる。これは monad の構造を持つ:

$$\begin{aligned}&OFrame_{n+1}(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1},OFrame_{n+1}(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1},\mathcal{H}_n))\\ &\to OFrame_{n+1}(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1},\mathcal{H}_n).\end{aligned}$$

- この monad についての代数

$$\alpha : OFrame_{n+1}(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1},\mathcal{H}_n) \to \mathcal{H}_n$$

を strict n-ハイパー圏という。

弱ハイパー圏

- hypergraph $(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\cdots,*,\delta)$ に以下の構造がある：
  - 各々の胞は正負の符号を持つ。
  - 符号を変える**共役**作用素:$w \mapsto \overline{w}$. これは、frame の圏の同型函手

    $$\overline{\bullet} : Frame_n(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1}) \to Frame_n(\mathcal{H}_0,\cdots,\mathcal{H}_{n-1})$$

    を定め

    $$\overline{\delta(w)} = \delta(\overline{w}).$$

- $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{H}_i$:universal cells

  HC1 普遍胞の共役は普遍である。

  HC2 k 次元結合図式 $w=(S_w,\lambda)$ の最高次元成分 $(\lambda(t))_{t\in S_w[1]}$ が同符号であるとき、**普遍合成子**(a universal composer) と呼ばれる 普遍胞 $U \in \mathcal{U}_{k+1}$ があり、その境界 δU はラベル付殻 S_w の閉包の拡張となっている。開殻 S_w の形式的合成 $c(S_w)$ における δU のラベル $\in \mathcal{H}_k$ を U **による** w **の合成**(a composite composed by U_w) と呼び $c_U(w)$ と書く。

  HC3 k 次元結合図式 $w=(S_w,\lambda)$ が、$(\lambda(x))_{x\in S[1]}$ が普遍で同符号あるとき、合成胞は普遍である。

HC4 普遍胞 U には、**同符号**の普遍胞 V があって

$$\delta V = \overline{\delta U}$$

をみたす。これを U **の転置**という。

- 次元 $> n$ の胞が普遍であるとき、n 次元以下であるという。
- 次元 $> k$ の結合図式の合成が一つしかないとき、k-weak であるという。（逆にいうと、次元 $\leq k$ の合成はただ一つには定まらない）

4 文献について

複雑系： 現状と展望 [CS:KT, CS:KI]. 生物学を重視した展望 [CS:O].

内部観測： 内部観測 (別名「存在論的観測」) についての徹底的考察は [IM:G1]. 内部観測の原点 [IM:Mat1]. 解説など [**?**, IM:Mat2, IM:Tj1, IM:Tn1]. 全く別の視点から内部観測に至ったもの [IM:Tn0]. 内部観測を考慮した研究の典型は [IM:Wit1, IM:Wit2]. ウィトゲンシュタインの研究の意義 [IM:G1, IM:Tn1]. プラスクワスの議論 [IM:Kr, IM:G2](解説 [IM:Tj1, IM:Tn2]). 数学における不定性 [IM:Hy, IM:Tj2, IM:Tn2]. [IM:V] は不定性を考慮した 徹底的研究例. 数論的代数幾何における内部観測の役割 [IM:Tn3].

圏論： 標準的教科書 [Cat:Mac] は最近改訂された。[Cat:BW] は計算科学向けだが概念の意義の説明がよい。[Cat:Bo] は圏論の現行の主要な道具を網羅的に詳しく解説（第３巻はトポス理論）. [Cat:Man] はモナドに基づく代数的理論の教科書. [WnCat1:Mak1] は選択公理を使わない 圏論の再構成の試み.

strict n-圏： 2-圏の入門としては [SnCat:KS]が最適。他に [Cat:Mac, Cat:Bo, WnCat1:Tj1]. 2-圏での結合図式の定式化 [SnCat:Str1]. n-圏での結合図式の定式化の試み [SnCat:P]. n-圏についての自明でない例 (oriental) の研究 [SnCat:Str2] が高次元圏論の一つの原点。[SnCat:Le] は最近の包括的解説。ω-圏の圏としての性質は accesible category の理論 [Cat:MakP] からわかる [SnCat:Str2]。

弱 n-圏： 双圏は [WnCat0:Be] で導入され、[WnCat0:Str] で深く調べられている。双圏の簡潔な定義は [Cat:Mac, Cat:Bo]. 弱３次元の定義 [WnCat0:GPS]. 弱高次元圏研究の break-through は Baez[WnCat1:Bae1, WnCat1:BD1] による発想の転換. Baez の系統では [WnCat1:Bae2, WnCat1:H, WnCat1:HMP1, WnCat1:HMP2, WnCat1:Mak1, WnCat1:Miy]. 入門的解説 [WnCat1:Tj1, WnCat1:Tj2]. Baez の方法で使われる operad(multicategory) については [SnCat:La, SnCat:Le], Baez の方法がプリミティヴに現われているもの ：

monoidal category の積を普遍的性質でとらえる試み [SnCat:li]. 通常の n-圏の路線 (globular approach) は Batanin[WnCat2:Bat, WnCat2:Str3]. Grothendieck による n-stack のプログラムから発する代数幾何系統のもの [WnCat3:Bre, WnCat3:Si, WnCat3:Ta]. これまでの単出力という制限を外すことで高次元セルの記述を単純化したもの：Hypercategory[WnCat4:MT, WnCat4:Tj5]. 高次元群論の頁 [WnCat5:Bro]. 0-weak Hypercategory の例 [WnCat6:La, WnCat6:Mil1, WnCat6:Mil2]

以下の URL 中の**FCS** は"`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp`"
または "`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~tujisita`" に
EPRINT は"`http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/`" に置き換えて下さい[7]。
圏論関係の研究者情報は "`http://hypatia.dcs.qmw.ac.uk`",
最近のプレプリントは "`http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/form`" で検索できる。

参考文献

[CS:KT] 金子邦彦・津田一郎「複雑系のカオス的シナリオ」朝倉書店 1996. ISBN 4-254-10514-2.

[CS:KI] 金子邦彦・池上高志「複雑系の進化論的シナリオ」朝倉書店 1998. ISBN 4-254-10515-0.

[CS:O] Y. Oono. Complex systems study as biology. to appear in International Journal of Modern Physics B, Vol 12 (1998). 大野克嗣「生物学としての「複雑系研究」1998.1. ("`http://www.affrc.go.jp:8001/dgc/DGCtpc/oono/oono.html`")

[IM:B] J. Beck. Simplicial sets and the foundations of analysis. In Applications of Sheaves, Proceedings, Durham 1977, Springer LNS VOl 753, 1979, ISBN 0-387-09564-0. p 113-124.

[IM:G1] 郡司ペギオ幸夫「 生命と時間、そして原生-計算と存在論的観測」現代思想 1994.9(142-163),1994.11(359-382),1994.12(313-330),1995.4(308-339),1995.5(254-267),1995.8(218-264),1995.12(254-267),1996.6(325-335),1996.9(156-181),1996.11(256-287).(目次："**FCS**/doc/mot/gunji.html")

[IM:G2] 郡司ペギオ幸夫「適応能と内部観測–含意という時間」,「複雑系の科学と現代思想ー内部観測」p98–231,1997.

[IM:Hy] Hyde, D. Sorites Paradox, in Stanford Encyclopedia of Philosophy. `http://plato.stanford.edu/entries/sorites-paradox/`

[IM:Kr] ソール A. クリプキ（黒崎宏訳）「ウィトゲンシュタインのパラドックス」産業図書,1983,ISBN 4-7828-0017-7.

[IM:Mat1] Matuno K., Protobiology, Physical basis of biology, CRC 1989 （訳書：松野孝一郎「プロトバイオロジー」東京図書,1992, ISBN 4-489-00336-6).

[IM:Mat2] 松野孝一郎「内からの眺め」複雑系の科学と現代思想ー内部観測 p8–50, 1997.

[IM:Tj1] 辻下徹「生命と複雑系」.「複雑系の科学と現代思想ー数学」pp75-225. 青土社 1998, ISBN 4-7917-9145-2. ("**FCS**`/doc/tjst/983-lcs.pdf`"(640K))

[IM:Tj2] 辻下徹「数学と複雑システム学の多様な関係」秋季日本数学会特別企画講演. (予稿,OHP:**FCS**`/doc/tjst/98X-gakkai.html`)

[7]"`http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/`" は e-print server `http://xxx.lanl.gov/` の日本でのミラーサイト.

[IM:Tn0] 角田秀一郎「人理学」(1994 年版：“**FCS**/doc/people/tsunoda/jinri.pdf”(791K), 改訂 99 年版準備中)

[IM:Tn1] 角田秀一郎「２つの系と自分」複雑系札幌研究会講演記録,1998.1 (“**FCS**/doc/tsunoda/tsunoda981.pdf”)

[IM:Tn2] 角田秀一郎「Russel の逆理の懐疑的解決」, 奈良女子大学人間文化研究科年報第 14 号掲載予定, 1998.7. (“**FCS**/doc/tsunoda/tsunoda987.pdf”)

[IM:Tn3] . 角田秀一郎「数学と存在論的観測」 、複雑系札幌研究会講演予定 1999.3 (“**FCS**/kaken/993program.html”, 予稿を “**FCS**/doc/tsunoda/tsunoda993.pdf” に掲載予定）

[IM:V] A.S. Yessenin-Volpin. The ultra-intuitionistic criticism and the antitraditional program of foundations of mathematics, Intuitionism and proof theory, p3–45. Proceedings of the summer conference at buffalo NY 1968, eds A. Kino, J.Myhill, R.E. Vesley, North-Holland 1970.

[IM:Wit1] ヴィトゲンシュタイン全集. 大修館書店 1976.

[IM:Wit2] アリス・アンブローズ編（野矢茂樹訳）「ウィトゲンシュタインの講義。ケンブリッジ 1932-1935 年」。

[Cat:BW] Barr M. and Wells C.. Category Theory for Computing Science, 2nd ed.. Prentice Hall 1995. ISBN 0-13-120486-6.

[Cat:Bo] Borceux F. Handbook of Categorical Algebra 1,2,3. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press 1994. ISBN 0-521-44178-1,0-521-44179-X,0-521-44180-3.

[Cat:Mac] MacLane S.. Categories for the Working Mathematician. Second Edition. Springer 1998. ISBN 0-387-98403-8.

[Cat:MakP] Makkkai M. and Paré. Accessible Categories: The Foundations of Categorical model Theory. Contemporary Mathematics Vol 104. AMS 1989.

[Cat:Man] E.G.Manes. Algebraic Theories. Graduate Texts in Mathematics **26**. Springer Verlag, 1976. ISBN 0-387-90140-X.

[SnCat:KS] Kelly G.M. and Street R. Review of the elements of 2-categories. Springer Lecture Notes in Math. Vol. 420 (1974), 75–103.

[SnCat:La] J. Lambek. Deductive sysmtes and categories II. Springer LNM 86, pp76-122, 1969.

[SnCat:Le] Leister T. Structures in Higer-Dimensional Category Theory. (“http://can.dpmms.cam.ac.uk/~leinster/POSTGOM.ps”).

[SnCat:li] F.E.J.Linton. The multilinear Yoneda lemmas: Toccata,Fugue, and fantasia on themes by Eilenberg-Kelly and Yoneda.

[SnCat:P] A.J.Power. An n-categorical pasting theorem, Proc. Category Theory, Lecture Notes in Math 1488 (1991) 326–358.

[SnCat:Str1] R. Street. Limits indexed by category-valued 2-functors. Journal of Pure and Applied Algebra 8 (1976), 149-181.

[SnCat:Str2] R. Street. The algebra of oriented simplexes. Journal of Pure and Applied Algebra **49** (1987), 283-335.

[WnCat0:GPS] Gordon, R., Power, A.J. and R. Street. Coherence for Tricategories. Memoirs of the AMS No 558,1995. ISBN 0-8218-0344-1.

[WnCat0:Be] J. Bénabou. Introduction to Bicategories, in Springer LNM 40, Springer-Verlag, Berlin,1967, 1-77.

[WnCat0:Str] R. Street. Fibrations in bicategories. Caheirs de topoligie et geomterie differentielle, Vol XXI-2, 111-160 (1980).

[WnCat1:Bae1] J. Baez, n-Categories - Sketch of a Definition (letter from John Baez and James Dolan to Ross Street, Nov. 29, 1995; corrected version as of Dec. 3, 1995) "`http://math.ucr.edu/home/baez/ncat.def.html`"

[WnCat1:Bae2] John C. Baez, An introduction to n-categories, "`http://math.ucr.edu/home/baez/ncat.ps`".

[WnCat1:BD1] John C. Baez and James Dolan, Higher-Dimensional Algebra III: n-categories and the Algebra of Opetopes, Adv. Math. 135 (1998), no. 2, 145–206 ("**EPRINT**/`q-alg/9702014`").

[WnCat1:BD2] John C. Baez and James Dolan, Categorification ("**EPRINT**/`math/9802029`").

[WnCat1:H] C. Hermida, higher-dimensional multicategories - handwritten slides of talks presented at CT97 (Vancouver, July 1997) and the AMS Meeting, Montreal, September 1997, "`http://www.math.mcgill.ca/~hermida/papers/n-cats`".

[WnCat1:HMP1] C. Hermida, M. Makkai and J. Power. Higher dimensional multigraphs, Proc. of LICS 1998, 199-206.

[WnCat1:HMP2] C. Hermida, M. Makkai and J. Power. On weak higher dimensional categories. Preprint 1997. "**FCS**/`doc/imported/makkai-multi.pdf`".

[WnCat1:Miy] H. Miyoshi. A combinatorial definition of Baez-Dolan ω-category (abridged version), preprint, Mar 1997.

[WnCat1:Mak1] M. Makkai, Towards a categorical foundation of mathematics, talk at the Logic Colloquium in Haifa, 1995.

[WnCat1:Mak2] M. Makkai, Avoiding the axiom of choice in general category theory, J. Pure and Applied Algebra, 108 (1996) 109–173.

[WnCat1:Tj1] 辻下徹．北海道大学大学院理学研究科講義「高次元圏論 I」 1997/8 資料 "**FCS**/`doc/announce/am97.html`".

[WnCat1:Tj2] 辻下徹「複雑系の数理–高次元圏論への招待」Computer Today, 1008.5 月号, サイエンス社. ("**FCS**/`doc/tjst/983-ncat-ct.pdf`"(624K))

[WnCat2:Bat] Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n-categories. Adv. Math. 136 (1998), no. 1, 39–103

[WnCat2:Str3] R. Street. The role of Michael Batanin's monoidal globular categories, in: "Higher Category Theory" (editors E. Getzler and M. Kapranov) Contemporary Mathematics 230. AMS 1998, 99-116. ("`http://www-centre.mpce.mq.edu.au/papers/Norwestn.ps.gz`")

[WnCat3:Bre] Breen L. On the classification of 2-gerbes and 2-stacks. Asterisque 225, 1994.

[WnCat3:Si] C. Simpson. Limits in n-categories. ("**EPRINT**/`alg-geom/9708010`")

[WnCat3:Ta] Z. Tamsamani. Sur des notions de n-categorie et n-groupoid non-strictes via des ensembles multi-simpliciaux, PhD. thesis, Universite Paul Sabatier, Toulouse, France, 1995. ("**EPRINT**/`alg-geom/9512006`")

[WnCat4:MT] H. Miyoshi and T. Tsujishita. Higher dimensional hypercategories. Preprint 1998.

[WnCat4:Tj5] 辻下徹．北海道大学大学院理学研究科講義「高次元圏論 II」 1998/9 資料 "**FCS**/`doc/announce/am98.html`".

[WnCat5:Bro] Ronald Brown, Higher Dimensional Group Theory, "`http://www.bangor.ac.uk/~mas010/hdaweb2.htm`".

[WnCat6:La] Yves Lafont. Interaction combinators. preprint July 1995.

[WnCat6:Mil1] Robin Milner. The polyadic pi-calculus: a tutorial.
("`http://theory.doc.ic.ac.uk:80/tfm/papers/MilnerR/ppi.ps.Z`").

[WnCat6:Mil2] Robin Milner. Calculi for Interaction, preprint April 1995.
("`http://theory.doc.ic.ac.uk/imported/MilnerR/ac9.ps.gz`")