数学と不定性

砂田利一氏の＜書評＞に応えて

‘‘http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/tjst/99b-futeisei.html’’

Version 1.01

辻下　徹

北海道大学大学院理学研究科数学専攻

tujisitamath.sci.hokudai.ac.jp

1999.11.3

目 次

前書き

数学セミナー４月号の書評欄に砂田利一氏が「複雑系の科学と現代思想ー数学」（高橋陽一郎・辻下徹・山口昌哉著、青土社 1998）を紹介していた [13]。この本を取り上げて頂いたことについては著者の一人として深く感謝しているが、それ以外についてはいささか残念な書評である。著者として残念なのはもちろんだが、たとえ学術誌ではないにせよ、このような印象文が「書評」として掲載されることに象徴される日本の数学の現状が、一数学研究者として残念に感じる。

その点をまず詳しく述べたい。

書評の後半で砂田氏は複雑系の数理的研究全般に対して懐疑的な感想を述べている。本腰を入れた複雑系批判ならば大歓迎である、それならば学問に生命を与える力があるからだ。しかし「十中八九流行に過ぎなかろう」式の印象にどういう学問的意義があるのだろうか。ご自身は否定されるであろうが、物見の座から揶揄的に語る姿勢は明白である。

書評の中で、砂田氏は自分が「保守的」であることを自覚したと書き「パラダイムシフトなど滅多におきるものではない」と正当化している。しかし、政治や事業ではいざしらず、ほっておけば保守的になってしまう人間の性をいかに克服するかが勝負である学問の世界で、保守的であることを自認し正当化することにどういう意義がどこにあるのか、理解に苦しむ。もちろん、学問の社会的基盤の維持にも研究者は関心を持たなければならないが、それは学問的内容の保守性とは何の関係もない[1]。

[1]学問的内容においても保守的でなければ生きていきにくい時が近づいていることは確かである。定期的に＜一定量の論文＞書かな

また、この書評でも「面白いものは面白い」という氏の「持論」が繰り返えされているが、それが数学という学問に特有の意義なのだろうか。「自分のやっていることに情熱を感じる」ことで一分野を弁護しようとすれば、まさにその弁護自身がその分野に趣味的価値しかないことを示してしまうのである。中堅研究者が、このような無意味な持論を何度も表明し続けられるのは、学問的価値とは無関係の「特権分野」の存在を明瞭に示すものと思われ、そこに日本の数学に潜在する深刻な学問的危機を感じざるを得ない。

現在の日本の数学を見ると、学問というよりは知力によるウルトラＣを目指すスポーツに近く、そこに情熱を感じる数学者も少なくないように見える。確かにそれは高貴なことで素晴らしいことだし、それは学問を豊かにするものだ。しかし、自分を包む世界や生物・人間・自分を了解したいという衝動は学問の原点である。組織化された学問社会の中で＜権威＞や＜慣習＞からの種々な妨害に抗して、その原初的衝動に根差した模索が一つの流れをなし始めつつある＜複雑系研究＞について、面白いことが何かでてくるのか楽しみ、と高見の見物を決め込む姿勢を一学問の主流派中堅研究者がとり続けるのは、学問の原点が忘れられて久しいことを象徴的に示すことと言えないだろうか。そういう姿勢は同時に数学の＜内破＞状態も象徴しているように思えてならない。

さらに砂田氏は言う、変化は静かにしかも着実に進行していく、と。複雑系研究のような鳴り物入りは怪しいということか[2]。しかし＜静かに着実に進行＞するのは進歩だけではない。衰退も静かに着実に進行するものである。数学とは自分達のやっている数学のことであると確信し疑わず、数学の「コア」と呼び守ろうとする動きが余りに目立つ。勢いのある学問にはそういう自己規定の暇はないはずである。自己を守ることに躍起となっている分野は見た目はいかに繁栄していても実質的に終っているのである。その後は＜変化は静かにしかも着実に進行していく＞のである。といっても、数学自身が衰退するわけではない、数学は人類の存在と原初的に分かちがたく結びついているからである。しかし、数世紀に及ぶ空白は数学史上何度もあったことは忘れるわけにはいかない。＜今の数学＞を外的に守ることが数学自身を内的に空洞化させる危険性を持つことに気付いて欲しいものである。

さて、書評には、別の納得の行かない点がある。砂田氏は、筆者の論説「生命と複雑系」について「晦渋な饒舌の裏に何が書いてあるかわからなかった」という内容の感想を書かかれている。書評であえて「自分にはわからなかった」と書くのは、自分にわからないのだから価値はない、という暗黙の主張を伴っていることは言うまでもない。それは、ご自身の判断力の広さ深さ鋭さの自負と同時に、現在の平均的数学者を代弁しているという自負を背景していることは言うまでもない。ここにも、現在の数学の末期的な様相が象徴的に現れていると言えないだろうか。

砂田氏の書評ならぬ感想文が、拙論「生命と複雑系」の潜在的読者を遠ざけるのは忍びないので、以下、そこで言いたかったことを別の角度から新たに説明を試みることにした。ただし断っておきたいが、複雑系研究を弁護しようとは思わない。この魅力的で生き生きした研究活動を弁護するというのは神を弁護するのと同じような馬鹿げた試みであろう。この動きは数学自身が本来持っている生命性、しかも今世紀は幽閉されていた生命性、を露わにする動きさえ伴っているのだ。

筆者は７０年代の終わりころに複雑系の問題に魅せられるようになったが、８０年代の後半になってようやく＜専門分野＞を後にして取り組み始めることができた。しかし、進むにつれて肝心の問題が遠のいていくという経験が続く中で９０年半ばころ郡司幸夫氏の生命論に出会った衝撃と感動は筆舌に尽くしがたいものがあった。それは、全く予想もしていなかったような方向に自分の求めていた道が伸びていることを示すものであった。しかし、その道は通常の理解の延長上にはなかったため、ある程度の理解に至るのにさえ数年を要した。

しかし、この事情は数学を学ぶ場合と変わらない。数学を学ぶ際、自分の理解の仕方に固執していては一歩も進まない、新しい理解の仕方を形成するのが数学の「学習」だからだ。その意味では、数学者が郡司氏

ければならない時が来れば、学問的にも保守的でなければ生きていけなくなるだろう。論文なしに有望な若い研究者が職を得ることができるのは少数の無根拠な＜特権分野＞に限られるからだ。

[2] この流行は意図的に起したのだと誇らしげに言う人がいた。理系の分野では想像しにくいことだが、学問的社会での地歩を拡大するためには、社会的流行を人工的に起すことも重要な学問的活動であると考えると考える研究者もいる。しかしこの流行によって理系の複雑系研究は大きな危機を迎えていることを指摘しておきたい。世間で流行して手垢のついた分野に野心的な若い人が関心を持たなくなることは自然なことだからだ。

の理論を理解するのに一番適した経験を持っているとすら思えるのである。事実、角田秀一郎氏のように短期間に深く理解してしまう数学者がいる。

昨年から、角田氏は郡司氏の生命論が数学にも決定的な意義があると主張しはじめた。筆者は１メガバイトを越す電子メールでの議論を通して、何段階かの「理解」を経て、また、最近角田氏が阪大数学科で行った集中講義を受講し、数学と複雑系の深い関係を自分なりに納得することができるようになった。

以下は、私の現在の理解の範囲で、郡司氏の生命論を数学の文脈で紹介を試みたものである。角田氏の論説より弱い主張しかできないが、これでも郡司氏の生命論の紹介としては機能することもあるのではないか、と期待している。しかし、繰り返すが、理解の仕方自身も問題となっているという点に注意して頂きたい。また、この小論で関心をもたれた方は、角田氏の論説 [?] や論文、および、郡司氏の論説をぜひ読んでいただきたい。

序

自然科学は精密で実証的な物理的宇宙像を形成するのに成功し、それを基礎に技術文明は限界知らずに進展している。その驚異的進展は、物理的宇宙像を基盤とする世界観を我々の常識にしてしまった。我々が生息しているのは、数学的法則に支配される宇宙で、人間や生物もその中の複雑な物理的存在に過ぎない、という世界観である。この物理的一元論が間違っているのことは誰でも肌で知っているのだが、その間違いの本質を明確にすることはそれほど容易ではなく、この誤った世界観を払拭できないところに、現代の諸問題の本当の病根があると私には思われる。

複雑系の科学は、生物を物理的存在として理解するには、これまでの「物理的」の意味自身を変更することが必要であるという認識を根底においている、とと言ってよい。

この洞察は哲学的にはカントに遡ることができるが、現代の自然科学の文脈では松野により内部測定の視座が提唱されたことによって明確な形をとり始めたと言うことができる。誤解を恐れずに単純に言えば、数学的法則は統整原理（つまりデータを整理するために導入される概念装置）でしかなく、宇宙を数学的法則に基づいて再構成できると考えるのは的外れだ、ということだ。このことは、数学的宇宙自身についても同様であり、この場合は、論理学や形式主義や集合論が統制原理に相当し、数学を集合論的に再構成することはできない、という洞察を与える。現代の数学者の大半が疑っていない「自然数の集合」という存在ですら、物理的宇宙と同様に、統整原理の中でしか意味がないのである。

以上のことをもう少し詳しく述べるのがこの小論の目的である。

生きた機械

物理的一元論では生物は「生きた分子機械」という逆説的な対象である。逆説的という言葉を使うわけは、通常、機械は生命の対極に位置するものと考えられているからだ。形態や本能などの堅固な基盤の上に生存する生物が、基盤からの自由を保持しているという逆説性を数理的に理解することが難しい。

この逆説性を「解決する」ことに原理的な困難はないと思われている。たとえば、「基盤と言っても、物理的基盤と生物的基盤とでは意味が違う。確固とした生物的基盤でも物理的基盤の上に築かれた「柔らかい基盤」に過ぎず、それが変動するのは当然である。単に、物理的メカニズムが複雑すぎて「ふつうの意味の機械」として把握することは人間にできないために生命性を感じるだけである、生命性は認識論的錯覚である。」というように考えることができる[3]。「複雑系の科学」が従来の自然科学と違うのは、逆説性をこのように解消できるとは思ってはいない点にある [5, 6, 12].

複雑系研究の多様な見解

「生きた機械を理解せよ」は一体どういう問題なのだろうか。それに対してはいろいろな見解があり、それが複雑系研究のアプローチの多様性として現れて

[3] この考えの変種としては古典的計算論に基づくものもある。チューリン グ機械の動作は一般的には予測できないから、生物の挙動が予測できないとして も生物が機械でないと主張はできないという考えだ。これは、生物の特性を我々 にとっての認識的困難さで特徴つけようとするもので、ラプラスの魔の目には 生命というカテゴリーは存在しない、と考えることになる。また、心は脳の機能に過ぎず＜心は認識論的錯覚である＞という主張にもつながるところがある。この主張は冗談としては立派な資格があることは認める。

いる。

標準的な見解は先程の方針の延長上にある。「物理的存在としての生物は原理的には何らかの数学的構造に完全に写しとられる[4]。我々の問題はこの数学的記述に潜む生命の秘密を、我々の限られた知性にとって意味のある形で抜き出すところにある。写実的な数学的記述には人間には到達不能で簡約不能な「非一様で個別的な複雑性」がつきまとう。そのために構成的方法 [5, 6] が必要となる。この方法は戦略的な有効性を備えていて、複雑系研究で重要な役割を果たしている。」という意見だ。

別の意見もある。生物を数学的記述に落とす段階で生命性は消えてしまうという考えだ [14]。「生命の本質は不定性にあるが、どんな方法であれ生命を数学化したときには不定性は消えてしまう。その理由は、数学では不定性・可能性等は適当なメタレベルに上がれば確定したものとして表現されてしまうからだ[5]。したがって生命性の直接的な数理的表現は望めないが数学を陰喩（「契機系」）として有効に使うことはできる。構成的方法はその一つと考えることができる [15]。」

しかし、このいずれも生命性の肝心な点を逸しているという洞察がある。それは、不定性が確実さとが表裏一体となっているという点に生命性の核心がある、というものだ [2]。「不定性は確固とした基盤自身のもつ不定性であり、不定性を基盤にしたり、何かを基盤にして不定性を説明したりすることはできない。」

この洞察は衝撃的であり、世界観の根底を揺すものを伴っている。拙論「生命と複雑系」[14] はこの衝撃を受けたときの感動を元に書いたものだが、不定性の強調にとどまり、不定性と確実性が表裏一体であるという側面については論じることができなかった。以下、この側面を中心に、数学の方から一つの照明を当ててみたい。

基盤の不定性

問題の核心は「基盤の不定性」が数理科学の文脈でも何か意味を持ちうるか、という点にある。

かなり考えてみても「基盤の不定性」というあり方を容れる余地は今の数学にはないとしか思えない。実際、定義で何かを確定してから議論を始める数学では、基盤の不定性は、さらに深い基盤を導入することによってしか議論できそうもないが、そうすると、問題の焦点はその新たな基盤の不定性に移ってしまう。これは無限後退だ。

しかし、基盤の不定性が数学では無意味と見えるのは、数学の本性によることではなく、現代数学が意図的に育成した一つの盲点に原因がある、と思われる。まずこの点から説明しよう。

1 数の不定性

視野に盲点があることを見る方法を知ったのは小学校の時だったと思うが、そのときの驚きは今でも鮮明に覚えている。強いて解釈すれば「視野の中心近くに見えない所があるのに気づかない」という無意味としか思えないことが見えてしまったことに対する驚きだったと言うことができそうだ。現代数学の盲点[6], [7]も同じようなところがある。

1.1 無限小数

最初に次の問を考えて頂きたい。

問 1. 円周率の十進小数展開の中に数字 0 が 1 万回続いて現れることがあるか[8]。

---

[4]たとえば、生物個体とその局所環境を構成している 原子すべての位置と速度のリストのような素朴なものを思い浮かべて戴 ければよい。もちろん、量子力学的枠組みでもよいし、さらに素粒子レベルからの 記述でもよい。もちろん、実際には、そういう究極の記述は見いだされていない し、それがいつか見いだされる可能性があるのかどうかすらわかっていない。

[5]たとえば、確率論的な不定性は分布のレベルでは確定しているし、量子力学的な不確定性でも、数学的には状態ベクトルとしては確定してしまう。

[6]盲点というアナロジーは必ずしも適切とは言えない。視野の場合には盲点の存在は問題ではないし、変えようと思ってもかえられない。しかし「迷信」は比喩としてもっとまずい、迷信はある程度自覚を伴っているという語感があるからだ。

[7]正確には、筆者にとっては盲点だった、というべきかもしれない。というのは、 ここで「盲点」と呼ぶものを明確に意識しつつそれを戦略的理由で活用し ている数学者もいるからだ。この場合は「盲点」という言葉は不適切 で、戦略的構えというべき積極的な意義がある。なお数学外の分野では、この 「盲点」の存在を明確に知っている人は多いようにも思われる。

[8]円周率の十進小数展開のレコードは現在 3.5×10^{10} 桁に達している。問い合わせていないが、0 が 10 個並んでいるものが見つかっている可能性はある。マテマティカなどの数式処理プログラムでは 5 万桁くらいは簡単に表示できる。4 文字の数字の並びは 2 万桁まででかすべて出てくる。しかし、10000 桁の数字の並びの数は 10^{10000} 個あるので、数が一様に現れるとしても 0 が 10000 回並ぶのに遭遇するには運が悪ければ 10^{10000} 桁まで計算しならないはずだが、この計算は結果自身の表記に宇宙のすべての原子全体の数を越えて

今の数学で解くにはどうしたらよいかわからないが、問題自身には明確な意味があることを筆者自身は長年疑ったことはなかった。しかし、実は問 1 は問になっていないのである。「問 1 が問いになっていない」とは一体どういうことだろうか。それを明確にすることが盲点の存在を確認する作業になる。

ラプラスの魔のような超知性体には、我々が２０桁の有限小数を見渡すのと同じように、π の無限小数表示の全体を見渡せるだろう。彼には、その中に 0 が 1 万回続くか否かは明確に見えるはずだ。集合論の言葉を使えば、π_i を小数点以下第 i 位の数とするとき、集合

$$X := \left\{ n \in \mathbf{N} \;\middle|\; \pi_{n+i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \cdots, 10000 \right\}$$

が空集合かどうかは明確に決まっている。こう考えてきた。

問 1 を初めて議論したのはブラウアーであった。明確な心的構成に基づかない数学的議論を無意味とするブラウアーは「ラプラスの魔」の立場に立つというようなことに意味を認めない。真という答えは、実際に 0 が 1 万回続いて現れる場所を示すことであり、また偽という答えは、0 がどこかで 1 万回続いて現れるという仮定から矛盾を導くことである。どちらか一方がいずれ実行できるかどうかを示すことはできないので、問の解が、真か偽かのいずれかであるかどうかはあらかじめはわからない。上記の集合による表現でいえば、集合 X が空であるか否かがいつか決まるかどうかはわからない。したがって、X が空か否かのいずれかだということは言えない。

しかし、この議論でも問 1 そのものには意味があると考えられている。排中律は必ずしも妥当ではない例として検討されているだけだ。しかし「0 がどこかに 1 万回続けて現れるという仮定」が実は確定した意味を持たない。言い換えると「集合 X」は決まっていない、そのわけは、そもそも「自然数の集合」$\mathbf{N}$ が決まってはいないからである。これが次の懐疑 N である。

この無意味・無意義としか思えない懐疑の意味を考えることが盲点の存在を確認する次の作業となる。

余りある数字を必要とするので実際にはできない。

1.2 現実的無限

懐疑 2 「自然数全体のなす集合」は確定しているのか。

自然数の集合についての懐疑は 2 千年の歴史を持つ [9]。アリストテレスは無限の 2 つの意味をを区別した。

可能的無限 数 n があれば、その次の数 $n+1$ が必ずある。

現実的無限 次の数を作る作業を続けていって、それが完了した状況を考えることができる。

前者に意味があることは、記号の組み合わせを扱うときを思い浮かべれば自明だが、後者は、終わらない筈のものが終わったと想定できるという語義矛盾を含むので、アリストテレス以来無意味なものとされてきた。

しかし、線分は目の前にあるがそこには無限の点があるではないか。現実的無限が線分にあるではないか。たしかに、線分の中に点をいくらとっても新しい点をさらにとる可能性がある。しかし実質はこの可能性だけであって、そういう操作を完了した結果得られる点の集まりがあってそれが線分となるという主張は自然数の全体を持ち出すのと同質のことだ。

懐疑 2 を気にしなくていいと感じるもう一つの根拠は数学的帰納法

$$S(0) \;\wedge\; \forall n\,[\,S(n) \Rightarrow S(n+1)\,] \;\Rightarrow\; \forall n\,[\,S(n)\,]$$

が自然数の本質を明確にとらえているという印象であろう。仮定における $\forall n$ がどこを動くかという点に自然数の確定を前提としているので、この印象は錯覚なのだが、その点は脇においておいて帰納法を少しだけ眺めてみよう。「次々と」という表現によって時間的因子を混入させてしまうのを避けるために、瞬時に行われる多段論法

$$\frac{S(0) \quad S(0) \Rightarrow S(1) \quad \cdots \quad S(n) \Rightarrow S(n+1)}{S(n+1)}$$

で表現してみる。推論規則までイデア界に頼るというナンセンスを避けるには、前提にある n 個の論理式全体を書き下せなければならない。しかし十進法で簡単に書ける「自然数」10^{100} についても、すでにこうい

うことは無意味であろう。逆に、イデア界を避けるために時間的資源に頼っても、すぐに人の一生の長さを越えてしまう。

このように、自然数に関する明確な議論の典型である帰納法自身がイデア界なしには意味を持たないのである。「自然数の確定」は、自然数について明確に議論できることの詩的表現と言うことすらできない。それに実質を与えるものは我々の実際の存在のどこにもない、と言っていいだろう。

自然数の集合が決まっていないことはスコーレムの逆理と言って昔から知られていることではないか。そんなことは盲点でも何でもない周知のことではないか、思う人も多いであろう。しかし、スコーレムの定理は１階の述語論理の中の技術的な結果であって、後述の（形式系そのものの）懐疑 3、懐疑 2 と同等な懐疑の下では意味を失う。また、たとえ自然数の集合が何らかの意味で決まっているとしても、ゲーデルの不完全性定理によりその本質はいつまでも捕まらないから、決まっていないも同然だと言いたくなるが、この定理を成立させている技術的背景も懐疑 3 の下では意味を失うのである。つまり、これらの＜成果＞ですら無意味になってしまうような懐疑 3 が控えている。

1.3　有限の立場

現実的無限への原始的懐疑をついに乗り越えることができたことこそ、現代数学の輝かしい進歩を示すものではないだろうか。集合論を数学の基盤にすえたヒルベルト [4] は無限集合そのものは無意味であることは当然のこととして認めた上で、それを数学で使うための方法を思い付いたのだ。その方法とは、集合が「ものの集まりである」という素朴な意味を捨てて「シュウゴウ」という無定義の数学用語を導入して、その用語の使い方を明確に決めて議論すればいいではないか。これによって、ムゲンシュウゴウをあたかも無限集合であるかのように議論し、面白い結果が得られれば、その議論をシュウゴウという無意味な言葉の記号的操作として表現すればいいのだ。

このトリックをもう少し詳しくみると、（気持ちとしては数学的対象である）項と（気持ちとしては項についての言明である）論理式と呼ばれる記号列が決められ、許容される記号列操作法を与える推論規則が指定され、その操作の繰り返しとして形式的証明という概念が定義される。

ところが、ここでも懐疑 2 と同じ懐疑に直面する。

懐疑 3　証明可能性は確定した概念か。

具体的な（たとえば 1000 文字位の）文字列が証明になっているかどうかは、簡単ではないが判定できる。しかし、現実には存在しえない文字列（たとえば「長さが 10^{100} の文字列」）が証明になっているかどうかを考えるということは一体どういうことを意味するのか。また、証明が現実には存在しえないような個数の文字を含む場合も考えるとはどういうことか。経験的には到達できないものについても言及する議論をする場合には、やはりイデアの世界を持ち込まざるを得ない。たとえば、懐疑 2 に耐えない「帰納法」に頼るしかないのである。

形式的証明可能性が概念として定まらないとすれば、無矛盾性の概念も定まらない。無矛盾性は、恒偽命題が証明されることはいつまでもない、ということであるが、「いつまでも」が何を意味するかが今わからないからだ[9]。

こうして、懐疑 2 を回避したと思ったところで全く同質の懐疑 3 に遭遇してしまう。ヒルベルトのトリックは結局、ヒルベルトが無意味だとした「自然数全体がなす集まり」の確定と同等のことを前提として初めて意味があるのである[10]。

以上のことから、現代数学は懐疑 2 の無視に支えられていることが確認できる。

1.4　外延主義

実無限を取り入れた外延主義は、単に集合論という概念組織にとどまらず数学の全域を呑みつくし、外延主義の是非を議論する場合でもこの海の中で議論するほどに、深い広大なものとなっている。

外延主義批判は集合論批判のことと同一視されるこ

[9] カット除去定理は帰納法を使っているので懐疑 2 に耐えない。

[10] こんな自明なことにヒルベルトが気付かなかったはずはない。ヒルベルト自身は具体的な数学的対象の具体的議論のところで生きていたわけで、そこにある彼の広大な明証性にくらべれば、有限の立場の一般的妥当性など、どうでもよいと本当は思っていたのではないか。ゲーデルの不完全性定理にも動じなかったわけは、単に政治的にそういう姿勢をとったというのではないかもしれない。しかし、この点は何の根拠もない印象である。

とが多いが、集合論は外延主義の表層にすぎない。現代数学を学ぶ中には外延主義の考え方を修得することが含まれるが、これはヒルベルトがパラダイスと言ったように、一旦その味をしめると容易にはそれを手放せないほどの魅力と多産性があるのである。

外延主義は概念の自由奔放な生産機構であり、歯止めとなるのは産出された概念の不毛性だけである。新しい概念は豊かに見える議論を産み続けさえすればよい。外延主義の戦略的正当性は２０世紀後半の数学の大発展により証明された。「外延主義が間違っている」などというのは無意味である。

問題は、戦略的には見事に成功した外延主義は、他の視点——たとえば数理科学における数学の使命という視点——から見て障害にはなっていないか、という点である。実際、外延主義には数理的世界観の深刻な平板化が伴っているように思われる。

自然数の集合が確定していると考える限り、可能性と実現とは区別されず、「可能性」は仮想的実現を全部数え上げてできる集合として確定してしまう。これでは、何が起こるかわからないという様相を数学的に表現しようとしても、中身がわかっている箱から何が選びだされるかわからないという様相としてしか表現できないことになる。これにより「実現可能なものの全体」に帰着されない「可能性」そのものが失われ、生命性の数理的理解の困難の元凶となっている。

2 外延の不定性

外延主義から一歩抜け出すとき、すなわち、懐疑2が真性なものであることを受け入れ自然数の外延が不定であることに気付くとき、数学はどのようなものになるだろうか。

外延の不定性の承認は、数学全体を深いところから変容させてしまう。なによりも不安を感じるのは「無矛盾性」が意味を失うことにより、数学の特徴である整合性が消失してしまうように見えることだ。

2.1 デカルト的明証性

まず現代数学の原点であるデカルト的明証性に立ち戻って考えてみよう[11]。

> 「示された対象について、他人が考えたところあるいは我々自ら憶測するところを、求むべきではなく、我々が明晰かつ明白に直観しまたは確実に演繹し得ることを、求むべきである。」（デカルト「精神指導の規則」）

しかも、演繹については、単に推論の鎖をたどったという記憶があるだけでは明証性はなく、その連鎖を何度も繰り返して瞬時にその連鎖を見ることができるようになって初めて明証性に達する、ということも別の所で述べている。デカルトが発見した明証性は、その随伴物である方法的懐疑を通して、数学と科学の主要な武器となり自然科学の大発展の源泉となったといっても過言ではなかろう。

2.2 整合性と明証性

自然数の外延の不定性を認めることは懐疑 3 を受け入れることであり、数学を特徴つけると思われる、整合性（無矛盾性）・客観性・体系性なども破綻させてしまう。これは致命的な間違いを犯していることにならないだろうか。

この心配は、論理的一様性への無根拠な信頼から来る。実際には、整合性は明証性の下では明らかだし、整合性自身は明証性を通してしか見えない。つまり明証性に立つ限り、整合性についての心配は杞憂である。とはいうものの、明証性に立たない「外的整合性」は瓦解する。しかし、それが瓦解しても数学はビクともしない生命性を持っている。

同様に、理論の「体系性」という外的特性も意味がなくなる。というのは、体系性は、局所的明証性を論理的に張り合わせる形式だが、張り合わせ回数がほんの十回程度の論理的張り合わせであっても、それにた

[11] 私的なものにみえる「明証性」を持ち出すとき「客観性はどうなるのか」という心配が条件反射的に生ずる。しかし、自分にとっての明証性を追及することと客観性を追及することとは区別できないことは経験的に明らかではないだろうか。明証性は自分の内で成立するように見えても私的なものではありえない [22, 第８巻「哲学探究」]。

だちに明証性を感じることができる人は特異な能力の持ち主であるということができよう。

別の視点からいうと、体系性・普遍性・整合性は明証性の上位にあるものではない。実際、明証性の観点からすれば、「一般性」ですら特殊な「明証」でしかない。整合性・体系性も同様である。丁度、宇宙船に乗って地球を見渡すとき、宇宙船が地球を超越しているのと全く同じ意味で、地球が狭い宇宙船を超越してもいるのである。

一般的な理論よりも具体例の方が豊かで難しいことは数学研究の経験が明白に示すことだ。外延主義からの脱却は、一般的な理論と具体例とが対等になることを意味する。

自然数の外延の不定性は、整合的で美しい数学の世界をズタズタに切り裂くように見えるが、切り裂かれたのは、起伏のある自然数の世界自身ではなく、一様性画法で描かれた自然数世界の絵——明証性を持たない平坦な架空の絵—— でしかない。しかし、理想化した絵から、自然数の不定な外延の例に目を転じるとき大きな当惑がある。この当惑は盲点解消に伴う不可避なものだが一過的なものだ。この一過的な混乱と喪失感という代価を払って得るものは全く新しい質の自由度である [17]。

数学内部にもたらす実りは予想がつかないが、すでに現れているものを通してある程度想像できるように思われる。

2.3 不定性の効用

2.3.1 具体的知識の明証性と不定性

「自然数とは何か」を知らなくても、具体的な自然数の使い方は誰でもかなり明確に知っている。動作を繰り返すときに回数を 1 回, 2 回, 3 回, $\cdots$ と数えることができるし、物の個数を同様に数えることもできる。また、十進法を使って筆算や算盤で、かなり大きな数の足し算や掛け算もできる。他にも、数についての多様な具体的経験と知識を皆それぞれ持ってそれが生活と一体となっている。また、文字を使った数の公式も知っているし、その使い方も知っている。

こういった自然数についての雑多な具体的知識は、それぞれ明証性を持っているが、これを普遍的な知識として統一しようとした途端に困難に遭遇する。

たとえば、§1.2 でも述べたように、「自然数を全部」具体的に捕捉しようとしてもアリストテレスが言うように論理的に不可能である。自然数の外延について明証性を持つ範囲で考えようとすれば、「思いつく限りの全部」というものしかありえない。このような具体的外延は、考える道筋や段階に依存して変化する。

同じように規則や演算の外延も不定である。足し算とは何かを具体的な状況や足し算の一般論やアルゴリズムを通して詳しく知っていたとしても、具体的数を実際に足すという状況では、足すということがどういうことかはその時点での明証性に基づいて新たに判断されるしかない [7]。この点は §3.1でさらに論じる。

2.3.2 不定性の応用例

内的集合論 この不定性を利用した数学がどのようなものになるかは、Nelson の内的集合論の中で超有限集合 (hyperfinite set) だけを残したものを考えれば想像できるだろう [11]。超有限集合の範囲に話しを限定することの欠点は、議論の始点で選択する超有限集合の恣意性を解消でなくなることだ。しかし、解消は理論的にも必要なものではなく、例の盲点に由来する一種の強迫観念ということさえできる。

超準数学は自然数集合の確定の上に建設された巨大な建築物だが、そこで行われている議論はその建築物とは独立した明証性を持っている。この感触は多くの文脈で無限集合の実体は巨大有限集合に過ぎないことを示唆している。

このことを少し明示的に（試験的に）表現してみると次のようになる。最大数を表す定数記号 M を導入する。これは、我々が出会うどの具体的な数 n についても $n < M$ であるとする。数の表記法を新たに思いついて今までの数よりも巨大な数 a を具体的に書き下すことができるようになっても $a < M$ が成立するので、M の性質は動く。数 M は、我々が明記できないほどに大きな数なので、その逆数 $1/M$ は、我々には 0 とは区別がつかない有理数である。定数記号 M が指示する具体的数は存在しないので、具体的小数の桁数という具体的な数が M を越すことはあり得ない。こうして、「動く最大数」M がある自然数論ができるが、その M は具体的数の世界では無限と同じ役割を

果たす。しかし、順序数 ω と違って M はあくまで有限の数であり $M-1$ も存在する。具体的数については、実数と有理数の違いは何もない。M に近い数を分母にする分数が実数そのものになる。

例：高次元圏 自然数の外延の不定性は、数学的帰納法から明証性を奪ってしまう。たとえば、2項演算 $x \cdot y$ についての結合律 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ から、通常は、任意回数の積が順序によらずに決まることが示されるが、その証明は明証性を失ってしまう。そのため、圏論でも、射の合成を考えるごとに、その合成を実現した2胞が出現するという形の再構築が必要となり、高次元の胞も考えてはじめて圏論に明証性が得られることになる [3]。結合律には4種類の2胞が出現しており、等号自身を与える4面体の形をした3胞が出現する。あらかじめ高次元圏を用意しておくのではなく、圏論を具体的に展開するのに応じて高次元圏が成長していく、という言い方しかできない様相が生じる。

例：数論的代数幾何 角田秀一郎が素描した数論的代数幾何のための自然数の描像 [16, 17, 18] は、驚くような豊かさと躍動性を持っている。ここでは、自然数の集合は、議論とともに発展する動的なものとなっている。今までの数学とは全く違う様相の一端が現れていると思われる。

2.3.3 単なる一つの面白い数学か

自然数の外延が不定である数学は結構面白そうだが、ほかの面白い数学とどこが違うのか。明証性の観点からみると「自然数の不定な外延」と「自然数シュウゴウ」とには、本物の鮎と張り子の鮎との差がある。ヒルベルトが強調したように自然数のシュウゴウは＜言葉の綾＞でしかなかったのに対して、上で議論した自然数の不定な外延は明証性を持っている。

現代数学の世界は、非兌換紙幣と金貨とが入り交じった経済のようだ。個々の自然数はすばらしい金貨だが、「確定した自然数の外延」という非兌換紙幣が入り込む。しかし、この非兌換紙幣の取り扱いの中には、本物の数学（明証性を伴う数学）が発生してくる。しかしそれは「自然数の全体」などとは全く関係のない、記号変形の深い数学的世界だ。ところが、そこには「無矛盾性」や「証明可能性」という新たな非兌換紙幣が登場する。

2.4 計算機の役割

外延の不定性によって明確になるのが計算機実験の意義だ。

自然数の外延が不定になると、無限小数の概念が不定となることから、実数も不定となる。これが意味するところは大きい。物理学で用いる数学的な表現は、実数や複素数を基盤とし、それにより普遍性を達成するものと思われているが、実数や複素数の「外延」は不定となるので、その数学的表現の「数学的意味」は不定となる。つまり、自然を数学的枠内に写すときに、写した先の数学的事物が、写す前の事物とは異質の不定性を持ったものになる。

力学系の枠組みを例に考えると、法則は、状態空間 X と、状態遷移規則 $\tau : X \to X$ で表される。数学ではふつう X, τ は確定した数学的対象と考える。ところが、X がユークリッド空間であったとしても、いまや「実数」は明確な外延を持つものではなくなるために、この力学系自身は画餅でしかない。それを現実の餅にするのは計算機実験である。そのとき、精度の選択や素子数など、様々な選択しなければならないが、これは数理モデル自身が持っている不定性そのものの現れである。「本当の実数の上のモデル」が別にあって、その近似を「まがい物の実数」を使って行っているわけでは全くないのである[12]。

現代数学は精妙な記号系を「ムゲン」という言葉の綾を駆使するゲームを展開することにより「いくら大きな有限であっても有限は有限」という鈍感さを助長している。そのため、「スケールの異なる有限」を計算機で経験できる事態、人類史上初めての事態の意義が十分認識されていないように感じる。計算機は人間に、未知の巨大有限数の領域——今まで無限領域と誤認していた領域– —-を探索することを可能にし始めていおり、その領域は次第に拡大している。

計算機実験から得られる有限らしくない有限の世界に関る具体的発見は、「理論的数学」（一つの具体でしかない一般論）とは異質の深さを持つようになると思われる。ただし、計算機実験が示すものは、その実

[12] Jon Beck による同様の指摘がある [1].

験結果の内容そのものにあり、その結果を通してエレガントな「数学的命題」や「生命についての言明」が証明された、という要約の意義は副次的なものになる。

3 現在の不定性

ここで外延の不定性についてもう少し掘り下げて考えてみたい。外延主義の懐疑は形式系の懐疑（たとえば選択公理は妥当か否か、古典論理は正当か否か）ですら無意味になるほど深い懐疑になっている。そのような深層で懐疑を発するからには新しい明証性が出現しているはずである。

3.1 ウィトゲンシュタインの懐疑論

外延主義の懐疑の性格を浮き彫りにするのがクリプキ [7] よって明確にされたウィトゲンシュタインの懐疑論 [22, 第８巻「哲学考究」] である。

> 51 未満の数しか足し算をしたことがない人が $51 + 27 = 78$ と計算したとき、その人は本当は答えは 5 かもしれないという不安を払拭できない。なぜならばこれまでクワス演算
>
> $$n \oplus m = \begin{cases} n + m & n, m < 51 \\ 5 & otherwise \end{cases}$$
>
> を行っていなかったと確信することはできないからだ。

この懐疑に関する誤解は多いので詳しく説明したい [14, 15]。

誤解 1:アルゴリズム. 「通常の足し算を有限個の計算例で特徴付けられないことは自明ではないか。足し算のアルゴリズム（たとえば小学校で習う十進法を用いて縦書きで行う足し算の仕方）を思い出せば、$51+27 = 78$ と納得できるではないか。」

しかし、アルゴリズムを実際にどのように使うかというところは完全には明記していない。その使い方は有限個の例を通して納得しているだけだ。

誤解 2:暗黙の了解. 「十進法による計算の中には、日常的な当たり前の動作しか出てこない。それがどういう動作かは有限個の例で十分はっきりわかる。51 を越えたら 0 と 5 を上下に揃えて書くなどという不自然なことをする余地はない。」

しかし、この主張自身からわかるように「不自然なやりかた」という言葉は、一般的には説明できず、具体的な計算に対して適用できるだけだ。具体的な計算を見て納得がいかないと思うとき口からでる言葉が「不自然なやりかただ」や「それは暗黙の了解に反する」なのだ。暗黙の了解は事後的に発生するだけだ。

誤解 3:脳中の回路. 「いや、アルゴリズムの使い方のような素朴な動作は、自分の脳の中に回路として組み込まれているので、初めての数であっても足し算の仕方は明確にわかるのだ。」

しかし、脳内の回路は複雑な物質系なので実に簡単なことでも「間違う」ことがあるではないか。しかも、間違っているのに正しいという確信を伴っていることもありそうではないか。

誤解 4:数学とは無関係. 「この懐疑は、数学的写像を具体的な数に適用するときに生じるあいまいさから出てくる。理論と現実の間の越えることのできないギャップの問題でしかなく、数学自身とは関係ない。」

しかし「数学的写像」は自然数の集合の不定性よりも深い不定性を含む。たとえば、理論的に「プラスが定義されている」という主張の根拠の典型例としては帰納法による定義

$$0 + m = m, \qquad (n + 1) + m = (n + m) + 1$$

があるが、公理系の使い方（この場合は代入）をクワス風にすればクワス演算がこの定義の条件を満たすことにもなる。

公理系という概念装置を組み立てている一つ一つの部品（推論規則・代入等々）もプラスと同じ身分でしかなく、それに依拠して疑念を退けるわけにはもいかないのである。形式系内部の論理式や証明だけでなくメタレベルの議論自身が疑わしくなってしまう。例えば、帰納法の色々な定式化が問題ではなく、定式化された「帰納法」を数学的に論じるときに使うメタレベルの帰納法が疑わしくなる。

誤解 5:過去の記録との照合. 「以前に計算した時の計算ノートを開いて、今やった計算が同じであることを確認できるではないか。」

過去の計算を見て計算規則の使い方の重要な点に気づいていなかったことに今気づくこともありうる。以前の計算が正しかったとしても「以前の計算と今の計算が同じ」という計算（ここでは「判断」）が正しいかどうかをどうやって納得すればよいのだろうか。「同じかどうかの判断」は「足し算」と全く同じレベルの懐疑に曝される。

誤解 6:単なる揚げ足取り. 「たしかにいつまでたっても計算の正しさは完全には納得できそうもない。しかし、そこまで確信しなければならないのであれば何もできなくなる。そういう無益な病的な揚げ足取りはやめて、確実な知識を積み重ねていこうではないか。」

しかしウィトゲンシュタインの懐疑は、なんでも疑おうと思えば疑えるというような漠然とした無意味な懐疑ではなく、覚醒をもたらす建設的な懐疑である。「確実な知識を積み重ねる」ようなことを我々はしてきたのではないし、今もそんなことをしているわけではない。それはもちろん常識となっている。我々がやってきたことをそのような単純な描像で理解するのは見当外れであることが内的に明らかになるのである。その見当外れから目覚めることが、生命や精神が科学の射程に入ってきた現在、急務となってきた。

3.2 懐疑がもたらす覚醒

ウィトゲンシュタインの懐疑は、自然科学がもたらした種々の呪縛からを我々を解放する覚醒をもたらすが、覚醒に至る前は人類のこれまでの歩みを無と化すような除去不能な深淵として不気味に現れる。しかし、そこから覚醒したとき、それ以前の＜整合的な世界像＞が張り子の虎であることが明瞭になる、生きた虎が産声を挙げる。これからの学問に課せられた使命は、この覚醒のもたらす世界像をあゆる方向で展開していくことであろう。

ウィトゲンシュタインは「言語ゲーム」によりこの新天地を独り踏破を試みた。ウィトゲンシュタイン死後５０年近くを経て、ほかならぬ日本で、松野孝一郎の「プロトバイオロジー」[8]・郡司ペギオー幸夫の「存在論的観測」[2]・角田秀一郎の「数学の脱構築」[17] などの本格的な作業が開始されはじめたのである[13]。

生命の本質はこの覚醒の外にあるわけではない。むしろ、この覚醒が生命性そのものであるとすら思われる。これが通常の神秘主義と決定的に違う点は、この覚醒は隠れているものではなく、いままで全く見えなかった、人間の基本的なあり方への開眼であり、デカルトの明証性がいま数学者によって当然のものとされるように、いずれは、少なくとも学者にとっては当然のものとなるようなものを伴っている。

3.3 覚醒のもたらす新しい明証性

この覚醒はデカルト的明証性を当然伴っているが、それに加えて新しい明証性をもたらす。この点を考えるため次を引用しよう。

> 言語のはたらき方の心理物理学的メカニズムとしての説明は、それ自身、現象（連想や記憶などの）を言語において記述したものである。それはそれ自身ひとつの言語的活動であって、記号操作の外部に位置している。われわれが必要とする説明は、記号操作の一部であるところの説明である。[22, 第３巻「哲学的文法 p86]

ここで必要とされている説明の特性が、新しい明証性の一例である。「記号操作の一部であるところの説明」とは、「説明の時点に行う記号操作自身が説明の本体となっているような説明」ということであり、その時点以外の記憶や知識を参照する説明とは全くことなる。これを §1.2 で述べた可能的無限と現実的無限の違いを通して少し説明しておこう。

Zermelo-Frenkel の公理論的集合論の無限公理は記号列

$$\exists x\,[\,\emptyset \in x \;\wedge\; \forall y\,[\,y \in x \;\Rightarrow\; y \cup \{\,y\,\} \in x\,]\,]$$

によって無限集合の存在を主張する。しかし、この記号列と「無限」とは、単にこの公理系を使うときに伴う記号変形操作が持つ可能的無限性を通して関係するだけである。この可能的無限の様相そのものに気付か

[13] E.Volpin の ultra-intuitionims[21]、E.Nelson の predicative arithmetic[10] も同様の面があるが、透徹してはいない。

せることが「記号操作の一部である説明」の例である。無限公理による「説明」は、無限の理解を深めるものではなく、「現実的無限」を言い直しただけのもので明証性はない。

> 「私の無限の説明は再三再四無限それ自身によってのみ可能なこと、すなわち、無限は説明できないこと、このことはなんら驚きではないのである。」([22, 第 2 巻「哲学的考察」第 138 節])

もう一つ例を挙げよう。「〜が言葉の意味の本質である」という説明は、その形式自身によって明証性に欠けていることになる。無限の場合と同様に、意味の「説明」も、その説明の時点で行う記号操作（この場合は言語活動）の具体的様相を気付かせることが「記号操作の一部であるところの説明」になっており、「その様相」を抽象化して「これが意味の本質である」というときは、「意味」を別のことばで置き直しているだけだが、実際にはその説明において言葉が機能している様相そのものが「言葉の意味」の問題の核心になっているわけである。これは、「書く」ということを説明するのに、その意味を記述した長い文をノートに書いてすませ、それ書いたという点を全く意識しないというのと同じ的外れな様相がある。

言葉についての様相 X を説明しようとするとき、X の説明の仕方自身に様相 X が現れることを示すようにする必要があるといえるだろう [2]。

この明証性は、現在の原初性そのものに立脚すること、と言うことも的外れではないかもしれない。
現在の原初性と不可分である生命や心の説明に、この明証性は不可欠であると思われる。

たとえば、心を脳の数学的モデルにおける数学的事象として説明するとき、説明において「自分の心」（あるいは説明している人の心）が関与している。説明しようとしている概念「心」が、今説明している「自分の心」と同じものだという点を気にしない説明に明証性を感じることは難しい。そのような説明は「心」についての誤解を積み重ねる危険すら皆無というわけではない。

生命性の場合も同様である。これを物質過程の何らかの特性として把握しようとする説明には明証性はない。しかし、どのように明証性が欠けるかを見るのは、心の説明の場合ほど自明ではない。

3.4 明証性の明証性

これまで「デカルト的明証性」を基底において考察してきたが、この考察自身は前節の意味の明証性を持つだろうか。

確かに明証性を基盤において考えることにより「外延の不定性」を明瞭に考えられるようになったと思われる。しかし、それは「明証性」自身によるのではなく、これを基盤として考えたということそのものからくるとも思われる。基盤を置くことによるわかりやすさは「深淵」を排除できるかのような錯覚をもたらすが、実際には深淵が次のように姿を見せる。

明証性自身は何かの基底となるような、確固としたものではない。実際、明証性は保存や比較が効かない。明証性の記憶や他人の明証性は、今の自分の明証性の代理にならない。何かを明証性を持って見ることは各人において毎回再度なさなければならない。しかも毎回、人毎に、以前とは違う明証性に到達する。

そうすると、それぞれの「今」における明証性がいろいろあってそれが動いていること、それが不定性の本質であり、このことを基盤にしていけばよい、と思いたくなる。しかしこれでは基盤を置かないという基盤を置くことになり自己矛盾している。

これでは不定性を徹底しようとすると無益な無限後退に陥るだけで何も前向きなことはないではないか。——何かを基盤を置いて不定性を明確にしようとする試みはこうして深淵に飲み込まれてしまう。

3.5 基盤という幻想からの解放

この種の錯誤は「普遍化の本能」「根拠探索の本能」の執拗な衝動から来る。覚醒はこの衝動を制御することから始まる。人間の知的活動の原点とも言えるこの衝動が有効性の範囲を越えて突き進むのを制御する有効な方法は「当事者」になることであろう。この点を「基盤の変化」と関連させて考えて、終わりたい。

素朴に考えるとき「確実なことがいろいろありそれを土台にして生活は成立していて、その中で疑うことに意味があるのはごくわずかである」と考えたくな

る。しかし、まず我々は生活しているのである。そして「何が生活の基盤か」という問い自身が発生するとき生活は新しい様相を帯びるのである。さらに、あることが基盤であると意識された途端に、それは基盤ではあり得なくなってしまう。

あることが基盤として意識されるとき、意識された瞬間からその基盤は解決不能な懐疑に曝される。基盤を根拠付けようとするとすれば、それは、基盤ではない可能性があることを明るみに出す。これは角田氏が再三再四指摘していることだが、何かを根拠付けようとすること自身がそれには根拠がないことを露にし、それが成り立たない世界を産出してしまうのである。ここに根拠付けの逆理がある。

これは何も日常的なことに限らない。現代数学は、数学の基盤を見いだそうとするところから始まったと言っても過言ではないが、基盤を見いだそうとしたこと自身が数学を変えてしまい、見いだせたと思った基盤、たとえば公理主義・集合論・実数論などは案の定とても基盤というようなものではなかったことが２０世紀の多くの知的実験が証明したと言ってよい。

そうすると、我々は一体今どこにいるのか。基盤は最初から基盤ではない可能性を持って現れる。これが確実さと不定性とが分かちがたいことの本質である。不定性は、確実さ信仰への解毒剤として強調されているだけだ。確実さがそもそも実質のないものならば不定性もないのである。これが根源的不定性である。本来虚構でしかない「確実さ」に頼って＜整合性＞だけで作り上げた壮大な建築物は壮大な張り子の虎なのである。根源的不定性を持った生き物である数学的対象は、こちらの思いのままにでっちあげるわけには行かないはずである。

結語

> 自然科学は人間が自然界で出会う困難を次々と解決し人間の諸能力を広げ続けている。それを可能にした、人類史上初めての詳細で実証的な宇宙像は、同時に生命・心が複雑な物質過程に附随するものに過ぎないことを示した。

これは錯覚である。この錯覚を数理的文脈で明確にできるか否かが今後の科学の進展の方向を大きく左右する。複雑系研究は、この錯覚から自由になった科学の胎動に他ならない。

複雑系研究の目標は（人間を含む）生物の持つ生命性の理解である[14]。生命性は「無限」同様、説明することはできないが、より明るい照明を与えることは可能である。しかし、それには通常切り捨てている「確実さが孕む不定性」に目を開く覚醒が必要がある [2]。整合性のみを頼りに思いのままに領土拡張を推し進めてきた現代数学の有り様は、バブル経済と似ていないだろうか。確実さが不定性を孕んでいることに覚醒するとき、＜整合性＞という概念が幻想であることが明らかになり、矛盾の有無は疑似問題になってしまう。逆に、不定性は整合性という糊で張り合わせて工作した多くの理論を刈り込み、生命性を持つ新しいタイプの理論 [17] を産みだすと予想される。

専門的知識というゴリアテの鎧と鉾ではビクともしない問題が人類の未来を左右するものとして我々の前に立ちはだかっている。虚空を撃つ武器への陶酔から目覚めて、素手で立ち向かうとしかできない問題に成算なしに生身でぶつかっていく人が数学の中からも次々と現れるに違いない。

参考文献

[1] J. Beck. Simplicial sets and the foundations of analysis. In Applications of Sheaves, Proceedings, Durham 1977, Springer LNS Vol 753, 1979, ISBN 0-387-09564-0. p 113-124.

[2] 郡司ペギオー幸夫「 生命と時間、そして原生-計算と存在論的観測」「現代思想」（青土社）連載 (1994-6).
(目次と抜粋："**FCS**/doc/mot/gunji.html"[15])

[3] A. Higuchi, H. Miyoshi and T. Tsujishita. Higher dimensional hypercategories, preprint("**FCS**/doc/tjst/994-ncat.html"), 1999.

[4] D. ヒルベルト・P. ベルナイス（吉田夏彦・渕野昌訳）「数学の基礎」シュプリンガー．フェアラーク 1993. ISBN 4-431-70654-2.

[14] この小論では筆者の問題意識から見た「複雑系」に焦点を絞った。論じてきたことは自明であるか、あるいは広い文脈で言及されている「複雑系」とはほとんど関係がない、という印象を与えたかもしれない。 実際、工学・医学などの「実学」の文脈では、主題となる「外延の不定性」は逆説ではなく自明な様相としてある。しかし、これは、その様相を見つめるのに有利な状況とは言えない。「外延の不定性」が自明でない数理科学の文脈に話を限定することでかえって「複雑系」の諸問題の根源にある「不定性」を鮮明にとらえらることができるだろう、これが筆者の位置からの見通しである。

[15] **FCS** は"http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp" に置き換える。

[5] 金子邦彦・津田一郎「複雑系のカオス的シナリオ」朝倉書店 1996. ISBN 4-254-10514-2.

[6] 金子邦彦・池上高志「複雑系の進化論的シナリオ」朝倉書店 1998. ISBN 4-254-10515-0.

[7] ソール A. クリプキ（黒崎宏訳）「ウィトゲンシュタインのパラドックス」産業図書,1983. ISBN 4-7828-0017-7.

[8] Matuno K., Protobiology, Physical basis of biology, CRC 1989 （訳書：松野孝一郎「プロトバイオロジー」東京図書,1992, ISBN 4-489-00336-6).

[9] A.W. ムーア（石村多門訳）「無限ーその哲学と数学」東京電機大学出版局, 1996. ISBN 4-501-61490-0.

[10] E. Nelson. Predicative Arithmetic. Mathematical Notes 32 Princeton Univ Press 1986. ISBN 0-691-08455-6.

[11] E. Nelson. Radically Elementary Probablity Theory. Annals of Mathematics Studies No. **117**, Princeton Univ Press 1987. ISBN 0-691-08473-4.

[12] Y. Oono. Complex systems study as biology. Int. J. Mod. Phys. B, **12**, 245 (1998). 大野克嗣「生物学としての「複雑系研究」」生物科学, **50**, 97(1998).

[13] 砂田利一「複雑系科学で数学は何ができるか」. 数学セミナー 1999 年 4 月号書評 p88.

[14] 辻下　徹「生命と複雑系」p 75-224, 「複雑系の科学と現代思想ー数学」（青土社 1998）.ISBN 4-7917-9145-2.

[15] 辻下徹「数学と複雑システム学の多様な関係」1998 年度秋季日本数学会特別企画講演. (予稿,OHP:"**FCS**/doc/tjst/98X-gakkai.html")

[16] 角田秀一郎「数学と存在論的観測」、複雑系札幌研究会講演 1999.3（"**FCS**/kaken/993program.html", 予稿:"**FCS**/doc/tsunoda/tsunoda99-2-10.pdf"）

[17] 角田秀一郎「数学の脱構築」. 現代思想 1999.4, p258-270.

[18] 角田秀一郎「数学と複雑系」. 集中講義（大阪大学大学院理学研究科数学専攻、1999.5.31–6.4).

[19] 角田秀一郎「数学と複雑系」. 数理科学連載「数学の未解決問題」, 2000.

[20] 角田秀一郎「数の脱構築」.

[21] A.S. Yessenin-Volpin. The ultra-intuitionistic criticism and the antitraditional program of foundations of mathematics, Intuitionism and proof theory, p3–45. Proceedings of the summer conference at buffalo NY 1968, eds A. Kino, J.Myhill, R.E. Vesley, North-Holland 1970.

[22] ウィトゲンシュタイン全集. 大修館書店 1976–1988. ISBN 4-469-11010-8(全 12 巻).

---

version up

Ver 1.01 櫻田　和也氏から指摘された誤植を訂正 (2000.2.7)