到達不能数

和訳 Ver 0.81

エミール・ボレル

辻下 徹 訳

和訳 2008.3.28

訳序

この本は前世紀の半ばにエミール・ボレル (1871-1956) が 80 歳のときに出版したものです。ボレルは近代解析学の設立に大きな寄与をした人ですが、その過程で、過去現在未来に人々が現実に具体的に把握できる自然数より、そうでない自然数の方が遥かに多いとしか言えないことをどう理解すれば良いかということについて長年にわたって繰り返し思いを巡らせました。明確なビジョンが得られないまま、これからの数学者に晩年のボレルが、研究をバトンタッチしようとしたものと言えます。

問題が根本的なものであるだけに、難しい数学理論を用いるようなテーマではないので、関心のある高校生でも理解ができる部分がほとんどです。しかし、現代数学は、ボレルの問題意識を共有できない方向に流れてしまい、他の言語に訳されないまま６０年近くの時が流れました。現代数学は、この本の主題である巨大数という概念そのものを否定するところに成立していると言っても過言ではなく、この本は忘れ去られたのは仕方のないことであったというべきでしょう。

しかし、前世紀後半になると自然数の質的多様性を意識した数学者が、数はわずかですが現れるようになりました。イェッセニン・ヴォルピンが自然数列の複数性について独創的な考察を展開したのは 1960 年で、ボレルの本の何らかの影響があったとしてもおかしくない時期と感じられます。1964 年にはロビンソンが超準解析を発見しました。数理論理学の発展に支えられた現代数学内の精緻な理論ですが、これによって、普通の数とは質的に異なる巨大数が数学的に精密に使えるようになり、それと同時にゼロではない無限小も利用できるようになりました。この理論を、解析学におけるニュートン以来の進歩であるとゲーデルは絶賛したことが知られています。

この理論の原点は前世紀初頭に人々を困惑させたスコーレムの逆理と呼ばれるものです。数学の理論は「一階の理論」と呼ばれる種類の枠組みで公理化できると言っても良いのですが、この枠組みの理論では数学的存在を唯一には特定できないという定理です。群や環のように種々の存在があることが重要な理論とは違い、自然数や集合のように一意的に意味が決まって欲しい数学的対象についても、一階の理論では特定できないということがわかったのです。しかし、唯一には特定できないことを逆用し、異なる「自然数モデル」を利用することで、「巨大数」を扱えるようになったわけです。

また、たとえ自然数という概念が確定したものだとしても、それについて成り立つ事実を公理的な方法で確定することもできないことは、ゲーデルの不完全性定理によって明らかになったと言えます。

この二つの定理によって、自然数集合と呼ばれℕと書かれている、最小の無限集合の存在や整合性については、宙に浮いたまま、これを基礎にして現代数学は進化してきました。

ボレル自身は、可算集合ℕについては疑義は持っていませんでしたが、自然数が質的に一様であるとは考えられないと考え、そのことについて、種々の考えを展開しました。この本でも、可算確率論との関係で、そのことを詳しく説明しています。

また、現代数学の基盤の一つである選択公理については、ボレルは、一貫して批判的でした。バナッハ・タルスキーの逆理は志賀浩二著「無限からの光芒」で日本で広く知られるようになりましたが、ボレルは、その原点であるハウスドルフの逆理を取り上げ、選択公理を使うことの危うさを描出しています。

２０世紀後半の数学の爆発的な発展の前にボレルの問題意識は無に等しいものに見えるかも知れません。しかし、現代数学が無限を無限集合として取り入れるときに無限のもつ柔らかさを切り捨てたことは、現代数学と生命科学との関係を皮相的なものにしてしまっているようにも思えるのです。この本でボレルの問題意識に接し、高度に発展した現代数学が置き去りにした数学があることを感じる読者がいることを願っています。その中から、柔らかい無限を取り入れた数学を発展させ、生命科学と数学との深い結びつきを可能にする人たちが出てくるのではないでしょうか。

2008.3.28

Contents

序

この小冊子は、数学解析の諸原理、特に、数の定義に関する、半世紀にわたる考察の結果である。これらの考察のいくつかは、この叢書の中のいくつかの本の中で、あちこちに概要を既に述べているが、それらを一つの論説としてまとめることは有用であると思われた。

20 世紀における物理学の根本的変革、特に、相対論・量子論・波動力学は、これまで絶対的で不変な実体を付与されてきた、時間・空間・物質・エネルギーなどのアプリオリな概念に縛られることなく、現象はそれ自身として観測されなければならないという考え方を基礎とすることにより発展した。

数学者は、自由に選んだ無矛盾な公理系から導かれる抽象的な理論を研究する権利を持っているが、それと同時に数学的対象の中で実際に到達可能なもの、すなわち、明確に特定できるような個別性を持つ対象に特別な地位を与えることにも興味を抱く。このようして、到達可能性と現実的対象の学問を正確に定義し、そこから仮想性と仮想的対象の学問を展開することが可能である。この二種の学問が相互に道具を提供し合うことも可能となることもある。

以上の基本的な考えを背景に執筆したこの本を若い数学者の考察に供したい。彼等の仕事は、科学を絶えず新しい発展に方向付け、他のすべての源泉となり、われわれの知識を発展させ、われわれの技術を完成させる、生きた泉であり続けるに違いない[1]。

1951 年 5 月

エミール ボレル.

快よくこの本の校正を引きうけていただき、また、興味深いノートでこの本を補なってくださったダニエル・デュゲ氏に感謝する。

[1] 近刊の「数学と物理における虚と実」という本で、ここに概要を示した数学と物理の比較を展開している。

Chapter 1

相対的に到達不能な数

1.1 自然数列

自然数の限りない系列を定義することは、数学者が無限と直面する最初の機会となった。この無限は実現されることなく、あらかじめ与えられたどの数をも越えていく変数の姿をとって現れる。

実際、何らかの方法で一つの数を確定し n と表すとき、n より大きな数を簡単に定義できることは明かである。たとえば、$n+1$,$2n$, $10n$, 10^n といった具合に、より大きな数を定義できる。

確定した自然数がある方法で定義される、とは次のようなことを意味する。まず明確で正確な規則が与えられていて、どの数学者もその規則により定義される数が何であるかがわかり、2 人の数学者がこの数について話すときには、その数が二人の間で同じ数であることも誤解なくわかり、その数を n という文字で表わすとき、$n+1$,$2n$ 等が表わす数も同じように誤解なくわかる、等々、というような状況を意味する。

自然数の定義の仕方はいろいろあり、定義された数を十進法のような決った数記法で書くことができる場合がある。しかし、十進法で書こうとすると余りに長くなってしまい実際には不可能であるような、極めて大きな数を表現するために、数学者はべき記法のような省略記法を用いた。たとえば、

$$n = 2^{2000000000} + 3^{3000000000} + 5^{5000000000},$$

と置くと、この数 n を十進法で表すとき、10 億個以上の数字が必要となることがわかる。もしも 1 ページに 1000 字を書くとすると、たとえその数字すべ

てを計算する時間があるとしても、この数を表現するのに 100 万以上のページが必要となる。このような数は、相対的に到達不能である、と言ってよかろう。ここで「相対的」というわけは、十進法と人間の一生の長さに依存した概念だからである。実際、もしも一秒間に 10 文字を書くことができるとしても、10 億文字を書くには 1000 日以上を要するので、それぞれ 10 億桁の数を掛けようとすると何世紀もかかることになる。

もちろん、数 n から、それより遥かに大きな数を定義することは簡単にできる。たとえば、

$$m = n^n + n^{2n} + n^{3n}$$

で定義される数 m などがその例である。

また、簡単な算術的性質を使い、素数を小さい順に並べたときの n 番目の素数を n' とし、m 番目の素数を m' と記すことができる。

数 m', n' は明確に定義されていると言えるだろう。すなわち、2 人の数学者が、この数について話すとき、同じ数について話していることを確信できる。また、科学の進歩によってこれらの数についての性質がいくつか明らかにされる可能性が全くないわけではなかろう。しかし、これらの数を十進法で表現することは、幾世代を経た後でも人類にとっては実現不能であると考えるべきであろう。

省略記法を用いることで、数 m, n, m', n' より大きな数を実に簡単に定義することができる。たとえば、

$$a_1 = 10^{10}; \quad a_2 = 10^{a_1}; \quad a_3 = 10^{a_4}; \quad a_n = 10^{a_{n-1}}$$

と置き、添字 n が a_1 であるような a_n を b と置き、数 b や、b 番目の素数や、π の十進展開の最初の b 個で定義される数などを考えることができる。これらの数と比較すると、この宇宙は（考え得るかぎり最も小さい単位をとったとしても）余りにスケールが小さく、これらの数は我々人類にとってだけでなく、この宇宙に棲息するあらゆる知的存在にとっても到達不能である。

ここでは、宇宙は実際に無限であると信じる人達がする反論には触れないでおこう。

しかしながら、もしも、私達が、数学者としては、上で定義したような数を考える権利を持つならば、$b+1$ や $2b$ のように、もっと大きな数も同様に定義できることをも認めなければならない。

1.2　相対的に到達可能な数

以上のことから、必然性のない人間の能力や宇宙の規模を抽象した者にとって相対的に到達可能な数は驚くほど多い。ただし相対的に到達可能な数というのは、上でいくつか例示したようなやりかたと同様の方法で定義される数のことである。しかし、もしも天文学者とともに過去と未来の人類の存続期間が有限であると仮定すると、全人間の数は同様に有限であり、それぞれの人は一生の間に、有限個の数しか実際に定義できない。もちろん、自分より以前に生存した人達が数を定義した文書をすべて知っているひとは、それらより大きな数を定義することができる、実際、それらの和とか積を考えればよい。しかし、それぞれの人の人生が限られている以上、こういった技巧の数は不可避的に有限個しかないものの、われわれは目がくらむほど大きな数に達することができるであろうが、その大きな数も、実現した無限というものを考えることができるとすれば、それに比べればとても小さいものであろう。

従って、次のことを認めざるを得ない。限りない数の系列のなかで、過去と未来のどの人間も到達できないような有限の境界を確定することはできないものの、この境界は存在し、その境界を越える数は人間には到達不能である、ということを認めざるを得ない。

次のように反論する人がたぶんいるであろう。すなわち、その境界を古典的な方法で越えることができる、たとえば、その境界を二倍するなどして。しかし、これは、われわれがその境界の数を知っていることを前提としているが、そうではないのである。この境界は人類が終焉した後でしか知ることができず、その時までに多くの人達が、各々何回となく、既に到達した境界を越えるための同様の方法を用いたことになるであろう。重要なことは、この種の操作は必然的に有限であるということだ。というのは、すでに得られた数のなかで一番大きい数に一を加え以下同様に可能なかぎり続ける、と言うことで事たれりとする人がいるかもしれないが、それでは、複数の数学者がどの数であるか合意できるようには数を決めてはいない。実施される作用を正確に定め制限することによってのみ数を決めることができるのであり、それ故に、定義された数は必然的に限られているのである。

我々の結論は到達不能な数が存在することである。すなわち、どの人も到達できないような数が存在し、しかも定義そのものにより、それらの到達不能な数を知ることはできず、その先にある数は到達不能であるような境界となる数を示すこともできない、というのは、この境界数もまた到達不能だからである。

したがって、我々はこの到達不能性を相対的なものと考えなければなら

ない、というのは、それは、宇宙の寿命と人間の能力についての仮定に依存するからである。

到達不能数の境界数を固定しえたと考えた途端に、それより遥かに大きな数をいくつかの語数で定義することができるが、それもまた、上で示した理論的境界のこちら側に留まっているのである。

1.3 可算集合

可算集合の概念は自然数の無限系列とじかに関係している。というのは、定義により、この系列の要素と、可算集合の要素との間には一対一の対応があるからである。このことから、可算集合の一般の要素は u_n を記すことができるが、この n はどのような自然数の値をとることもできる。n を知ったときに u_n の値を正確に計算できるとき、その可算集合は、実際に可算であるという。この計算は、長さゆえに、場合によっては容易には実行できないかもしれないが、この二次的困難には余り拘泥せず u_n の計算に計算機が何世紀かかるかというようなことは詮索しないことにしよう。

一番単純な可算集合は、有理数の集合と十進法で表される数の集合である。区間 $[0, 1]$ にある数に制限すると、十進数の集合は以下の等式を正確にする簡単な規則によって定義される：

$$0,2547 = u_n, \quad n = 254 \times 9 + 7.$$

有理数ではもう規則はかなり複雑になる。そのわけは、見かけでは違う二つの分数が同じ数を表すことがあるからである。そこで、0 と 1 の間の有理数を次のように書くとする、

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \frac{1}{6}, \frac{5}{6}; \frac{1}{7}, \ldots,$$

すなわち、まず分母が増大する順に並べ、同じ分母については分子が増大する順にならべるとする。すると、$\frac{1}{7}$ の順番は

$$r = \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(5) + \varphi(6)$$

となる、ただし、$\varphi(n)$ は、n より小さく n と互いに素な数の個数を表す (1 と $n-1$ はそのような数の例である)。与えられた既約分数の順番を与える一般の式を求めるには、r のような和を実際に計算できることが必要であろう。

10 億番目の分数を求める問題や、分母分子が共に 5 桁の数であるような分数の順番を求める問題は、理論的には解決できないわけではないが、その解決は、たとえとても単純であるとしても、極めて長い計算を要し実際には実行不能である。そう考えると、分母分子が 100 桁の有理数の順番を求めることは実行不能であることは言うまでもなく、それに対応する数は到達不能であると考えるべきである。

これまでのところ、例として最も単純な可算集合を取り上げてきたが、二次整数や、代数的整数を考えると複雑さはかなり増大する。二次整数は、整数係数の方程式

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

の解である、ただし、a は正の整数、b, c は正または負の整数で、$b^2 - 4ac$ は正であって平方数ではないとする。二次整数を順番に並べる一番簡単な方法は、まず和

$$a + |b| + |c| = m$$

が同じ二次整数を小さい順にならべ、次に、m を 3 から順番に増やしていけば、すべての二次整数を明確に決った順番に並べることになり、それにより、増大する自然数によって二次整数に番号を付けることができる。しかし、与えられた番号を持つ二次整数は何か、という問題や、その逆の問題は、すべての可能な場合を一つ一つ数えるという長い骨が折れる作業以外の方法で解けるとは思えない。

与えられた可算集合の番号付けの問題が解決できたとすると、この集合の要素は、その番号がわかればわかったと考えることができ、さらに、番号が到達可能な要素は到達可能であると考えることができる。

実際のところ、色々な可算集合への数学者の関心は、自然数に対する関心ほどは大きくない。かなり大規模な自然数の平方根表が作成されているので、それにより、(近似ではあるが) いくつかの二次整数を知ることはできる。しかし、これまでに数学者によって実際に考察された二次整数はきわめて僅かであり、実際に解かれた二次方程式の数はきわめて少く、3 次以上の代数方程式についてはさらに少ない。

二次整数については、有理数と同様に、周期的性質がある。有理数は有限小数か循環小数と等しい。二次整数は周期的な連分数に等しい。いずれの場合にも、周期性は最初からあるわけではなく、数が不規則にすきなだけ続いた後に始まる。

従って、有理数でも二次整数でも、周期的に現れる数達とその前に現れる不規則な数の列によって分類することができる。これらの数がわかってい

るときは、連分数のときは、これらの数の和を制限すると都合がよい。この制限は明かに、その数を制限することになり、その数だけを考えれば良いことになる。

いくつかの例で上のことを正確にしよう。

単純循環少数や混合循環少数として、3 つの数を固定しよう。もしも、まず 2 文字が不規則であるとすると、次のような小数を得る：

(1)$0.37666\ldots,$

ここで 37 は二桁のどんな数におきかえても良いし、6 も、どのような数に置き換えてもよい[1]。

不規則な数が一つだけに場合は、次のような数を得る：

(2)$0.753535353\cdots$

最後に、もしも不規則な数がないときは、次のような数を得る：

(3)$0.347\,347\,347\ldots$

数を (1), (2), (3) のいずれかの形に分類する規則を示唆することは容易だが詳しいことは述べない。しかし困難な部分を詳細に調べると、一定の展開を消去することになり、それらの数え上げはかなり困難になるかもしれない。

循環連分数については、周期的な部分の数字と非周期的な部分の数字の和を 4 に固定しよう。そうすると、次の可能性がある：

$$\begin{array}{l} 1,1,2,2,2,\cdots; \\ 1,1,2,1,2,1,2,1,2,\cdots; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3,1,1,1,1,1, & 2,1,1,2,1,1,\cdots; \\ 1,3,3,3,3, & 1,2,1,1,2,1,\cdots; \\ 1,1,2,1,1,2,\cdots; & 1,3,1,3,1,3,\cdots; \\ & 3,1,3,1,3,1,\cdots \end{array}$$

次の展開は、和が 4 未満の 2 または 3 のときに対応する：

[1] $0.46666\ldots$ や $0.12999\ldots$ などについての詳しい検討は読者に委ねたい。これらは、3 つより少ない数の場合に帰着できる。

$$
\begin{array}{ll}
2,1,1,\cdots; & 2,2,2,\cdots; \\
1,1,1,\cdots; & 3,3,3,\cdots; \\
1,2,2,\cdots;. &
\end{array}
$$

この和を 4 から順に $5,6,7,\cdots$ と変えていくことにより、0 と 1 の間にあるすべての二次数を得る、ただし、

$$1,1,2,1,2,\cdots$$

は、数

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

に対応するが、これは、$\frac{1}{\sqrt{3}}$ と同じであることがすぐにわかる。

しかし、この場合でも、具体的には述べないが、ある種の面倒なことがあるため正確な数え上げは容易ではない。

そのような事情があるにもかかわらずこの例を取りあげたのは、数のいろいろな表現法にどんな役割を与えることができるかを例示したかったからである。もっと広い意味での数えあげシステムの比較検討を後で行う予定である。

1.4 同一集合の数え方の多様性

以上、簡単な集合をとりあげ、いろいろな数えあげ方をみてきた。ある集合の数え上げかたが一つ得られると、それを利用して他の数えあげ方を無数に作ることができる。これには、自然数全体を種々の方法で並べることができることを利用する。

自然で最も単純なやりかたは、増大関数 $\varphi(n)$ で、n が自然数なら値も自然数であるようなものをとり、n と $\varphi(n)$ とを入れかえる方法である、ただし、n が $\varphi(m)$ という形をしていて m 自身はそうではない、という場合は例外として除外する。たとえば $\varphi(n)=n^2$ としよう。このとき、2 と 4, 3 と 9,5

と 25,6 と 36,7 と 49,8 と 64,10 と 100,11 と 121, 等々を入れかえることで、次の列を得る。

$$1, 4, 9, 2, 25, 36, 49, 64, 3, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289,$$

256 が 225 と 289 の間にあるのは、4 が 2 と交換されているので 4 と 16 は交換されなかったからである。従って、16 は 256 番目の場所に現れるが、256 の自乗は場所を変えない。同様に、6561 は 81 と交換され、6561 の自乗は場所を変えない。

もっと重要な変換として、関数 $\varphi(n)$ として $n!$ のように n^2 よりもっと速く増大するものをとることができる。このとき、次のような列を得る：

$$1, 2, 6, 24, 120, 3, 5040, 40320, \cdots, 23!, 4, !25, 26!, \cdots$$

ただし、数字 5 は 120 番目に現れ、数字 7 は、5040 番目に現れる、等々。

こうすると、小さい数がずっと後に置かれ、かなり大きい数が最初の方に置かれることがわかる。この現象を強調することは、関数 $\varphi(n)$ の増大度をどんどん速くすれば簡単にできる。たとえば、

$$\varphi_1(n) = n!$$

とおき、

$$\varphi_2(n) = \varphi_1[\varphi_1(n)] = [n!]!$$

と書くことができるし、続けて

$$\begin{aligned} \varphi_3(n) &= \varphi_1[\varphi_2(n)] \\ \varphi_k(n) &= \varphi_1[\varphi_{k-1}(n)] \end{aligned}$$

と書くことができる。

さらに、どの $\varphi_k(n)$ よりも速く増大する関数として $\varphi_n(n)$ を考えることができる。このとき、

$$\begin{aligned} \varphi_2(2) &= 2, \\ \varphi_3(3) &= 720!, \\ \varphi_4(4) &= [(24!)!)]! \end{aligned}$$

であり、第 4 番目は、10 億の 10 億倍以上の個数の数字で表現される数の階乗となる。第 5 番目は、たとえ単純な形で表現されたとしても、現実には到達不能な数となる。

こういったことは自然数だけではなく可算な列すべてについても適用できるので、これらの列の到達可能な項と到達不能な項とを区別したのは、自然な区別なのか人工的な区別なのか、と自問したくなるだろう。もしも、上で示唆したような番号付けの変更を利用した区別であったとすると、この区別は人工的であるということができよう。

しかし、この区別は全く人工的なものではなく、みかけとは違い到達不能な項という概念は、数え上げかたの考えうる限ぎりの変更とは独立していることを以下確かめよう。無限について絶えず考察している人は、この単純な直観から、次のことを理解するであろう。すなわち、到達不能な項はそうでないものより遥かに多く存在し、そのため、系列の最初の方には、そういった到達不能数も含む数のなかでほんとうにわずかな数の居場所しかない、ということを理解するであろう。しかし、この直観的な議論をもう少し正確にしていくことは無意味ではあるまい。

1.5 数え上の特性関数

以下、2 つの増大関数 $\varphi(n)$ と $\psi(m)$ を定義し、数え方の変更がもつ重要性を評価することにする。ただし、変更は自然数 n と m の間の全単射対応から由来する場合とする。すなわち、各 n に一つの m が対応し、その逆も同様であり、異なる 2 つの n に対しては異なる 2 つの m が対応しているとする。

連続する数の列 $1, 2, \cdots, n$ を考えよう。これに対応する n 個の相異なる m を $m_1, m_2, \cdots, m_n$ を書き、これらの最大数を $\varphi(n)$ と表すことにする。このとき明らかに $\varphi(n) > n$ である。というのは、もしも $\varphi(n) = n$ ならば、n 個の数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ は、$1, 2, \cdots, n$ を並べかえたものであり、こういったことが無数の n について起これば、その変換は、連続有限列の増大列があって各連続有限列の内部変換から由来しているものにすぎず、こういった余り重要でない場合は無視してよいからである。

一方、$1, 2, \cdots, m$ に対応する $n_1, n_2, \cdots, n_m$ の最大値を $\psi(m)$ と表す。以前にあげた変換の最初の例では、$\varphi(n) = n^2$,$\psi(m) = m^2$ であり、二番目の例では $\varphi(n) = n!$,$\psi(m) = m!$ となる。

しかし、φ と ψ が異なるような例を作ることは難しくない。たとえば次[2]がその例となっている。

n......1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12

[2]訳注: m 列は、奇数番目に非平方数を、偶数番目に平方数を、小さい順に並べたもの。

m ......1　4　2　9　3　16　5　25　6　36　7　49

関数 $\varphi(n)$ と $\psi(n)$ がわかれば、m と n が限りなく増大するときに、並べかえから生じる変化の限界を明確にすることができる。

実際、これらの関数の定義そのものより、

$$n < N$$

をみたす n に対する m は、

$$m < \phi(N)$$

を満し、同様に、

$$m < M$$

ならば

$$n < \psi(M)$$

となる。

この結果は、次のように表現することができる：関数 φ と ψ の違いを除いて、到達可能な数は到達可能な数に留まっている。そこで、あとは、この関数 φ と ψ とが、到達可能性の概念を実質的に変えないことを示せばよい。そのためには、増大関数の系列を構成するのに使える方法を手短かに思いだす必要がある。この方法の応用としては、ポール・デュブワ・レイモンの有名な定理がある。

1.6　増大関数系列

合成の繰り返しと対角線法で、どんどん急速に増大するような関数を作ることができることはすでに示唆したとおりである。実際、どんどん速く増大する可算個の関数があるとき、それぞれの関数がとる可算個の値を横に一列に

このとき、

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(n)$	1	4	4	9	9	16	16	25	25	36	36	49
$\psi(n)$	1	3	5	5	5	7	11	13	13	15	17	19

ならべたとしよう。たとえば

$$\begin{array}{llllllll} 2^2, & 3^2, & 4^2, & 5^2, & 6^2, & 7^2, & \cdots; \\ 2^3, & 3^3, & 4^3, & 5^3, & 6^3, & 7^3, & \cdots; \\ 2^4, & 3^4, & 4^4, & 5^4, & 6^4, & 7^4, & \cdots; \\ 2^5, & 3^5, & 4^5, & 5^5, & 6^5, & 7^5, & \cdots; \\ \multicolumn{7}{l}{\dotfill;} \end{array}$$

のようにならべると、対角線で定義される関数、$2^2, 3^3, 4^4, 5^5, \cdots,$ すなわち関数 n^n は、各行で定義される関数 $n^2, n^3, \cdots, n^k, \cdots$ のどれよりも速く増大することは明らかである。

対角化によって得られた関数の合成を新たに繰りかえし、次に対角化をし、次にまた合成を繰りかえすことができるので、想像を越える速度で増大する関数をすぐに得ることができる。増大関数に適用できるこれらの方法と、どんどん大きな数を定義する方法との間には完全な並行性がある。実際、ある関数の変数に既に定まった自然数を代入したときの関数値が計算できると仮定して、大きな数をつぎつぎと定義する。しかも、関数の増大度が極めて速くなったときは、変数値よりも増大度の大きさの方が効いてくる。たとえば、n^n の繰りかえしだけを考えてみよう。すなわち

$$\begin{aligned} N &= \varphi_1(n) = n^n, \\ & \quad\ \varphi_2(n) = N^N, \\ M &= \varphi_k(n), \\ & \quad\ \varphi_{k+1}(n) = M^M \end{aligned}$$

とし、そして最後に

$$\psi(n) = \varphi_n(n),$$

と置くと、$\psi(1000)$ は、n が何十億桁の数であっても関数値 $\varphi_1(n)$,$\varphi_2(n)$,$\cdots$,$\varphi_{100}(n)$ のいずれよりも遥かに大きいことが簡単にわかる。

わたしたちは、既に定義された数であるか、あるいは、人類が消滅する前までに実際に定義される数を、相対的に到達可能な数であると定義したが、人間の数が有限であることと人が一生の間に考える数も有限であるという事実から、相対的に到達可能な数の大きさには限界があるように思われた。従って、前節で定義した関数 $\varphi(N)$ や $\psi(M)$ を可能な限り複雑なやりかたで定義したとしても、到達不能な数の定義に現れる関数に比べると、その増大度は限りなく小さいことを認めざるをえない。これは、まさにわたしたちが明確にしたかったことである。すなわち、これらの関数の増大度がどれほど速かっ

たとしても、到達不能数の概念との関係で言えば、とるにたらない速さであるため、前節で吟味した数列の変換は、到達不能数には何の影響も与えないのである。

これらの結果は、ポール・デュボア・レイモン（Paul du Bois Reymond）の定理を使ってより精密にすることができる。この定理は対角線論法で示されるが、ポール・デュボア・レイモンは、まさにこの方法で定理を発見したように思われる。

ポール・デュボア・レイモンの定理によれば、可算個の増大関数 $\varphi_n(x)$ があるとき、どの $\varphi_n(x)$ よりも急速に増大する関数 $\psi(x)$ を構成できる。この定理の証明では、まず、無限個の増大関数 $\varphi_n(x)$ から新しい無限個の増大関数 $\psi_n(x)$ を作り、x のどの値についても、$\psi_n(x)$ は $\varphi_n(x)$ より大きく、x のどの値についても、$\psi_{n+1}(x)$ は、$\psi_n(x)$ より大きいようにする。このとき、関数 $\psi(n) = \psi_n(n)$ は主張した性質を持つ。実際、関数 $\varphi_n(x)$ のどれ一つを取っても、n がある値を越すと $\psi(n)$ はそれよりは大きいからである。可算集合があり、その数え上げを可算無限回行うとすると、可算無限個の増大関数を得るが、それらより速く増大するポール・デュボア・レイモンの関数 $\psi(x)$ を構成できる。この関数 $\psi(x)$ や、その繰り返しは、到達可能数の定義に出てくる関数のクラスに属するものであり、したがって、$\psi_n(x)$ の増大度がいかに速くても、到達不能数との関係で言えば無視できる。というのは到達不能数は、どのような数え上げの方法を考えても到達できないからである．[3]

以上により、相対的な到達不能性の概念は絶対不変な性質であることがわかったことになる。なぜかというと、われわれは有限のみ用い実無限は一切使わなかったからであり、また、いかに複雑な構成であっても、有限しか使わないとすれば無限から遠く離れていることにおいては変わりはないからである。第 4 章でこの結果の重要性を吟味する予定である。

[3] もちろん、数え上げを可算無限回するとすれば、n 番目の数え上げでは、u_1 を n 番目とし、u_n を最初とすることができる。n が到達不能数のときを考えると、われわれの結論と矛盾するように見える。しかし、この場合には、n 番目の数え上げ方自身が到達不能であることに注目すべきである。

Chapter 2

絶対的に到達不能な数

2.1 無理数

ギリシャ人は2の平方根が整数の比とはなりえないことを証明し無理数を発見した。その後、無理数という言葉は明確にされ、有理数の集合を二つの組に分けることで無理数は定義できることになった。ただし、ここで、第一組のどの数も、第二組のどの数よりも小さい、というように二分する。もしも、この分割で、第一組に最大数がなく、第二組に最小数がない場合は、第一組のどの数よりも大きく、第二組のどの数よりも小さい唯一の数として無理数が一つ定義される。

ある場合には、与えられた数がどちらのクラスに属するかを判断するための簡単な判定条件を与えることができ、有理数を二分割することが簡単にできる。

簡単のため、0 と 1 の間の数について考えることにしよう。2の平方根の逆数を定義するには、

$$q^2 - 2p^2$$

が正か負かに応じて、数 $\dfrac{p}{q}$ を第一組か第二組に収容すればよい。

この分け方は、整数を係数とする代数方程式の解、つまり、代数的な数についても使える。実際、次のように分けることができる。未知数を線形変換し、0 と 1 の間には解が唯一つのあるようにできるので、以下、この条件

の下で考える。$f(x)$ を整数係数の多項式とするとき、数 $\dfrac{p}{q}$ を、$f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ が正のとき第一組に、負のとき第二組に入れればよい[1]。

同じ分け方で解を定めることができる超越的な方程式もある。たとえば

$$\cos x - \sin x = 0$$

という方程式については、$\dfrac{\pi}{4}$ が 0 と 1 の間に唯一の解である。したがって

$$f(x) = 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

とおくと、$\dfrac{p}{q}$ が $\dfrac{\pi}{4}$ より小さいか大きいかに応じて $f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ は正または負となる。

上のような分けかたはとても単純そうだが、一般化は難しい。ここで難しいと言ったのは、0 と 1 の間の有理数を、第一組のどの数も第二組のどの数よりも小さいという条件が満されるように二分する一般的方法を与えることはできそうもない、という意味である。実際、この条件を満すように二分するには、本質的には、定義しようとしている無理数を別の方法で定義できていなければならない。この問題は、有理数の番号付けを定めたときに第一組に属する有理数の番号全体を決定する問題となるが、問題はさらにややこしくなる。問題をこのように表現すると、自然数の集合を二分割する問題となるが、その分割を特徴付ける条件は極めて複雑そうである。

しかし、0 と 1 の間にある数は、有理数であろうと無理数であろうと、自然数の集合を二分割することで指定することができる。しかも、この二分割には何の制約もないのである。実際、0 と 1 の間の数は、二進法により

$$x = 0.1001011101\dots$$

の形で表現できるが、n 桁目が 0 であるか 1 であるかに応じて n を二つのクラスに分ければよい。こうして、与えられた数に、確定した分割が対応する。ただし、自然数を 2 のべき乗で割った有理数は例外である。というのは、こういう数は二通りの表示法があるからである。実際、

$$0.10011 = 0.1001011111\dots$$

[1]訳注: 必要があれば f を $-f$ に置き換えて $f(0) < 0 < f(1)$ とする.

であり、左辺の表示では 0 が無限に続き、右辺では 1 が無限に続く。

上で挙げた自然数列[2]のような例はいくらでも挙げることができるが、自然数の数列をアプリオリに定義しようとすることには困難を伴う。この困難については第 4 章で考察する。実は、ここまでのところでは、無理数が自然数列を定めていただけで自然数列が無理数を定めていたわけではない。しかし、無理数が自然数列を定める諸相を調べてから、自然数列が無理数を定める諸相を考えたい。

2.2 無理数の直接的定義

有限個の自然数を使って直接定義できる無理数の例を既に与えた。代数的数もその一例である。

しかし一方、はるか以前から、数学者は単純な超越関数を定義している。$e^x, \log x, \sin x, \cos x$ などは、その中でも最もよく知られているのが、楕円関数も挙げてよいだろう。なお、ワイエルシュトラースの記号を使うと、楕円関数は任意定数 g_2, g_3 に依存するが、これらの定数としては、有理数や代数的数のような、すでに定義された到達可能な数をとらなければならないのは明らかである。

変数の値が到達可能な数をとるとき、これらの単純な関数の値も到達可能な数であることはあきらかである。たとえば、e^a,$\log a$,$\cos a$,$\sin a$,$\mathfrak{p}(a, g_2, g_3)$、などがその例である。

整数係数の代数的微分方程式を考え、初期条件に到達可能な数を与えれば、上のような結果を拡張することができる。変数が到達可能な数を値とするときの積分の値も到達可能である。

相対的に到達可能な数しか使わないとすると、それは有限個しかないので、上のように定義できる到達可能な数も有限個しかない。しかし、数学では、ある問題が解決できなくても、それより難しい問題に帰着できれば、その問題は解決された、と考える慣習がある。それに従って、自然数のなす可算無限は到達可能であると考えることにする。したがって、有限個の自然数を使って有限回のプロセスで定義した数の全体もまた可算無限である。

いま自然数について言ったことは、上述の種々のプロセスや将来の数学者が考えるであろうプロセスについても言える。実際、これらのプロセス数

[2]訳注: 第一組に属する数を順に並べたもの。

は有限であり、たとえ人類が限りなく存続し人間の総数に限りがないとしても高々可算であると考えることができる。これらのプロセスのいずれも、有限個の自然数（か、すでに定義された到達可能数）しか用いないので、これらのプロセスで到達可能な数の全体は可算となり、いつまでも到達不能な無理数の集合の中では微小な部分しか占めないのである。

この章の最後に、事前に定義されている数の算術的な性質を利用して、無理数を間接的に定義する方法を調べることにしよう。

2.3　間接的定義のプロセス

われわれは、可算個の自然数を使った無理数の定義は実現不能であるとみなした。その理由は、可算個の自然数を定義する一般的な方法がないからであった。しかし、定義されたと言ってよい可算自然数列もある。それは、すでに知っている無理数から定義されるような数列であった。このように、与えられた無理数から定まる自然数列のいくつかをすでに与えたが、それを使って他の自然数列を可算無限個与えることができる。

その中から、とても簡単だが深く調べることに意義があるものを挙げよう。0 と 1 の間にあるすべての数 α は連分数として表示でき、その不完全商はゼロではない自然数を与える： $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

以下

$$\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

により連分数

$$\alpha = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}}$$

を表示することにしよう。

数 α に、列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ を対応させることができる。しかしこの列に無限回現れる数もありうるので、一般にはかなり複雑である。そこで、次のように置く方が簡単である：

$$b_1 \;=\; a_1$$

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1 + a_2 \\ b_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ b_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

....

そうすると、この列 $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ は、自然数の増大列となるが、増大列は紛れなく a_n を定め、そして数 α を定める。

自然数の可算集合は、よく知られているように、自然数の増大列として表現できるので、無理数と一対一に対応する、と言うこともできる。

しかし、一方では、与えられた増大列 $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ を使って無理数を定義する方法は多い。

たとえば、数 b_n を十進法で表現すると、

$$7, 12, 23, 50, 189, 3245, 3246, 3500, \ldots$$

のような列を得るが、これらの数字を小数点の後にすべて並べて

$$\beta = 0.7\ 12\ 23\ 50\ 189\ 3245\ 3246\ 3500\ \ldots$$

のような無限小数を定義することができる。

もちろん、数 β は、いくつもの増大列からも得られる。たとえば

$$712,\ 2350,\ 18932,\ 453246,\ \ldots,$$

も β が得られる。しかし、これは、われわれの結論を妨げるものではない。

一方、一つの増大列 $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ からたとえば、次のような増大列を無数に引きだすことができる

$$\begin{aligned} & b_1, b_3, b_5, b_7, \ldots; \\ & b_1, b_4, b_7, b_{10}, \ldots; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ & b_1, b_4, b_9, b_{16}, b_{25}, \ldots; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

そして、これらの列はいずれも種々の方法で無数の無理数を定める。

最後に、与えられた増大列から、新しい増大列を定める方法は無数にあることにも注意を喚起しておこう。たとえば、

$$b_1+1,\ b_2+2\ b_3+3,\ \ldots.$$

一つの列から定義される新しい数はそれぞれ別の列を定め、今度はその列で新しい数を定義できる。

もしも数 β の構成の仕方は間接的である、と言うことにすると、二重に間接的な方法、三重に間接的な方法、等々で数を定義できるし、さらには、可算無限の度合で間接的な方法でも数を定義できる。

特定の事実を証明する際に、間接的に形成されるこれらの数を例として考察した数学者が色々な分野にいる。しかし、近い将来に、これらの数についての一般論が築かれるようには思えないし、また、これらの数を一つの数学的理論の中で位置付けることが可能になるような結果が近い将来に得られるとも思えない。

実際、数 β の定義に使った数 α の性質と結びついた β の性質を何一つ示すことができそうにもない。そういった結果が得えられるまでは、β が価値ある数学的存在であるという権利はないと言うべきであろう。実際、そのような存在は (それを定義するときに使った性質も含めて) 少くとも二つの性質を持たなければ数学者の目には興味深いもとはならないのである。

われわれにとって興味深いことは次のことである。すなわち、間接的な定義の仕方の集合は明かに可算であるということ (有限である、といっても良いのだが、反論の可能性をすべて避けて、可算ということにしておきたい)、そして、これらの方法で到達可能な数もまた可算であるということである。

2.4 絶対的に到達不能な数

0 と 1 の間の無理数の中で、到達可能なものは可算集合をなすので、到達不能な数は可測集合で測度が 1 である、ということが以上によりわかった。したがって、絶対に到達不能な数は、到達可能な数や相対的に到達不能な数に比べると無限に多く存在すると考えるべきである

しかしながら、絶対的に到達不能な数も、数学において重要な役割を果す。以下の章で、その役割を明確にすることにする。その際、到達不能であることに起因する困難を指摘することを忘れないようにしたい。その困難とは、これらの数のどれ一つとして正確に定義できない、というものである。

ただし、ここで、正確に定義できるとは、数学者達がそれらについて議論するとき、同一の唯一の数について語っていることが確信できる、ということを意味する。数学的存在を検討するとき、この積極的基準にいつも立ち戻らなければならない。もちろん、数学的存在のクラスを調べることは禁止されているわけではない。たとえば、一実変数の連続関数の場合、その関数のクラスに共通の性質を調べてもよい。しかし、もしも、得られた結果を適用できるような、明確に定義された具体的な関数が存在しなかったとならば、クラスについて調べる興味の大半は失われるであろう。ずっと後の方で、個々の要素が到達不能であるような集合を調べるのに確率論の方法が役にたつことがあることを示す。確率論の方法の適用は、確率の概念に直接結びついている選択の問題に依っているので、ツェルメロの選択公理に関することをいくつか調べることになる。[2006/02/23 00:10]

2.5 ツェルメロの選択公理

この本ではツェルメロの選択公理について深く調べるつもりはないが、44 節ではもう一度取りあげている。実際、この公理から導かれる帰結——その仕事はポーランド学派が中心となって行われたが——をすべて解説し研究するには、もっと大部な本が必要である。このテーマについては、このシリーズにあるシェルピンスキー氏の本と、著名な雑誌 Fundamenta Mathematicae のバックナンバーに委ねたい。

この本では、ツェルメロの公理により、連続体のどの部分集合からも特別な要素を選ぶことが可能となる、ということを知ればわれわれには十分である。したがって、例えば、絶対的に到達不能な実数の集合の中から特定の要素を選ぶことができることになる。この公理により、到達不能な数を文字 a によって表わし、この数 a が確定していることを断定し、さらに a が他の到達不能数とは違うことを断定することができる。つまり、それが到達可能数だった場合にできることはすべて出来ると断言する権利があるのである。

そのような公理を認めることは不条理に見えるが、実数の中には自乗すると -1 になる数が存在しないことがわった後に、自乗すると -1 になる数を i と書くこと、と比べて不条理な度合が大きわけではない。数学者の意思によって創造された虚数が源泉となって種々の数学理論が産みだされたが、これらの諸理論は、実変数の領域にも数々の新しい結果をもたらした。ツェルメロの公理も同様に、定義できないと考えるのが当然であったような数を定義することを可能にした。虚数という言葉が特別な意味をすでに持っていな

かったとすれば、これを虚数と呼ぶことも可能であっただろう。こうして学問の新しい分野が創造されたことになる。すなわち、ツェルメロの公理から導かれる定理群からなる分野である。わたしは以前に、ツェルメロの公理を認めない数学をユークリッド的数学と呼ぶことを提唱したことがある[3]。ツェルメロ的数学とユークリッド的数学の関係を調べることは興味深いテーマであり、私が特に興味深く思うのは、ユークリッド的数学のおもしろい定理がツェルメロ的数学により証明できるが、虚数の場合と同様に[4]、ユークリッド的数学で直接に証明することが困難なようなことがあるかどうか、という問題である。私見では、将来、このような例の有無によってツェルメロの公理の真の価値がわかるであろう。

[3]C.R.Acad.Sc. t. 230, 1950, p 1989.

[4] たとえば、実多項式が一次式と二次式の積となるという代数学の定理は、虚数を使えば簡単に証明できるが、直接証明しようとするのはとても気分が悪い。直接の証明を発見することが、フェルマ予想やゴールドバッハ予想がこれまでそうであるのと同様に、不可能であったと仮定することは、アプリオリに馬鹿げているわけではない。

Chapter 3

連続体の均質性

3.1 ユークリッド空間

数学者が無理数を定義するようになったのは幾何学によることであり、また、0 と 1 の間の数の集合のような連続体の直観的概念を持つようになったのも幾何学による。この幾何学的直観はわれわれに有用であり続けている。もっとも、集合論の奇妙な結果はときには幾何学的直観と矛盾する[1]ようにみえるのだが。

したがって、ユークリッド空間の本質的性質を簡単に想起しておくことは無益ではあるまい。この空間は、ユークリッドの時代から 19 世紀の初頭にいたるまで、唯一知られていた空間であり、これのみが幾何で使われていた幾何学である。

この空間の本質的な 2 つの特性として、諸図形が同じであることとと相似であることとを簡単に定義できることがある。

まず同じであることについて。ユークリッドに従い、2 つの図形が等しいのは、それらが重ねあわせることができるときである。これは、次のように言っても同じことである：2 つの図形は重ね合わさったとき等しい。しかし、重ねあわせ可能な 2 つの図形が、重ね合わされた 2 図形となるには、一方を移動させなければならない。そしてユークリッドによる空間の公理は、図形の大きさや形を変えないで上のような移動が可能である、という内容からなる。

[1] ここでは、到るところ稠密だが測度がゼロの集合の存在のことを念頭においている。

空間内のにおける移動可能性に関する上の仮定は、日常生活における通常の観察の一般化である。われわれは、この観察を常に使っており、それなしには生きていくことは不可能であろう。こういった観察の中で、最も直接的なのは、自分自身の身体に依存してなされるものである。身体はわれわれが歩くときに明らかに変形するが、その後同じ格好をとりもどすので、移動は身体を変形せず、またわたしたちも同じ人であるという確信を持つ。この観察は、家具や道具のように、馴染み深いものにすぐに拡張できる。

幾何学における抽象化の作業により、上の観察を二重に一般化することができる。まず一つは、どのような移動も近くから見ると変形をもたらすことが判明する。一般には、とてもわずかな変形で測定できないほどだが、変形は存在する。実際、剛体でも重力の影響を受け変形することを知っている。長い鉄棒が両端で支えられているときはこの変形がはっきりとわかり、棒の中央が少し湾曲することを確かめることができる。どのような物でも重さがある物体は、重力場の中で位置を変えるとき、測定することができないほどわずかではあるが、同様の変形が生じると考えねばならない。

われわれは、重力定数が緯度に依存することを知っている。赤道の重力は極での重力よりも大きい。したがって、物体を赤道に近づけるとき、重力はわずかではあるが変化し、従って、極めて微小ではあるが変形がおきる。微小とはいえ、数学者は無視するわけにはいかない。もちろん、われわれは、現代物理学も分子論も無視する、ユークリッド的数学者のスタンスをとることにする。

従って、 幾何学者は、観測された結果を抽象化により一般化し、極めて微小な変形は無視でき、移動によって幾何学的形態は厳密に変わらない、としなければならない。

一方、われわれは、有限の移動しか観測しない。確かに、われわれは、コペルニクス以降、地球が動くことを知っているが、その移動距離は数億キロメートルに限られている。ユークリッド幾何学の第二の一般化は、移動の尺度に上限を設けないことにある。ユークリッド空間を無限とみなし、図形の不変性は、移動距離が（単位は、たとえばキロメートルあるいは光年として）相対的に到達不能な数のカテゴリーに属するほど大きいとしても、成り立つと考えるのである。

宇宙の実際のサイズは、簡単に定義できる数よりもかなり小さいことをわれわれ知っているが、この物理的状況が、ユークリッド空間が無限に広がっていると考えようとする強力な想像力を持つと自から信じる者を妨げるようなことはない。

3.2 ユークリッド空間の相似性

ボヤイとロバチェフスキーが最初に示したように、図形を不変にする変換群の存在だけではユークリッド空間を特徴つけることはできない。さらに、平行線についてのユークリッドの公理を付け加えなければならない。この公理には、数多くの同値な表現を与えることができる。その中でも最も単純なものは、大部以前にわたしが示唆した、相似図形の存在である[2]。この形式により、平行移動でやったように、単純で直接的な経験に訴えてから、抽象化により一般化し精密化して納得できるようになる。

洞窟人が動物の素描を描くことを知って以来、人間は、異なる規模の絵が、同じ対象を表現できることを知っている。この直観的な概念は、同じ対象が、われわれが近づくと大きくなり遠ざかると小くなるが量もかたちも保たれる、という事実に明らかに関係している。

こうして相似図形の一般的な定義に自然に到達する。これらの図形の点は、異なる点は異なる点に対応し、どの三点も、それと対応する三点とともに相似な三角形を形成する、ただし、三角形が相似であるというのは、同じ角度を持ち辺が比例するものと定義される。

現実的には、相似図形の相似比は1にかなり近い、といっても地図についてはそうは言えないが。(しかし、地図については、地球が球形であることによる別の困難が生じるが。) しかし、何にも妨げられることなく、ユークリッド幾何学者は、相似の概念を、われわれの経験よりも広い領域に移し、相似比を到達可能数よりも大きくしたり、その逆数ほどに小さくしたりもする。しかし、もちろん、無限に大きいところでも無限に小さいところでも、空虚な空間のこれらの性質には、どのような物理的現実性をも与えることはできない。最近の宇宙論、相対論、量子論、原子モデルの諸研究は、空間のユークリッド的な観念がいかに不十分なものであるかを明らかにしてきたが、それでも、明らかにユークリッド空間は抽象的な価値をすべてそのまま保っている。

[2] 「初等幾何学」(アルマン・コリン著。ドイツ語、ロシア語、日本語などに翻訳されている。)

3.3 空間の等質性

ユークリッド空間についての以上の 2 つの本質的性質は次のように要約できる。この空間は等質で長さの単位として特別なものは一つもなく、諸性質は、原点の選びかたや長さの単位に依存しない、すなわち、原点と単位ベクトルの端点は勝手に選ぶことができる。従って、ユークリッド空間は、3 つの直交座標軸と長さの単位によって定義されるデカルト空間と一致する。空間の等質性の特別な場合として、直線上に定義される座標軸である 1 次元の連続体の等質性を得る。数を定義するという視点からみるとこの等質性は興味深い。

平行移動と相似性は、代数的に見ると x を $x+a$ あるいは、ax と置きかえることである。2 つの変換の集合は、x を $ax+b$ に置き換える、線形変換と同じことになる。この本の主題からすると、a, b の少くとも一つが到達不能な数の場合を調べる必要がある。そのとき、その変換は、到達可能な数を到達不能な数に移し、逆に、到達不能な数のいくつかを到達可能な数に移す。ここで注意してほしいことは、a, b は、到達不能な自然数であるときも、あるいは、その逆数のときも到達可能ではなくなるということである。

これまでと同様に、0 と 1 の間にある正の実数のみ考察することにしよう。それらは、ユークリッド空間内に置いた直線上の線分上で表現される。われわれが調べる数の集合は、この空間の等質性を受けつぐ。

説明を単純化するために十進法を用いるが、第 5 章では、他の種々の数記法を考察する予定である。

0-1 区間を 10 個の区間に等分すると、各区間内の点の十進少数展開は、小数点以下の最初の数が決り、区間が 0 から 1 に順に動くと、その数は $0, 1, 2, \cdots, 9$ と動く。

同様に、0-1 区間を、100 等分、1000 等分、10000 等分すると、各々の区間上で小数点以下 2、3、4 位までの数が決る。

連続体の等質性により、たとえば 10000 等分して得られる同じ長さの種々の線分、は互いに重ね合せることができ、ある意味では同じである。一方、端点が 0.2314 と 0.2315 の線分 S の尺度を 10000 倍すると、この線分は 0-1 区間と一致するようにでき、0-1 区間に対するのと同じように、区間 S の分割を調べることができ、この操作を好きなだけ繰りかえすことができる。こうして、線分が小さすぎてもう分割できないと考えねばならないような事態が回避できる。こうして、連続体における選択の問題を考える準備が整ったことになる。

3.4 連続体での選択

確率論で、直線の線分上の点の位置についての確率を定義しようとするとき、その定義はアプリオリには恣意的であり、与えられた線分の長さが1のときは、条件

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

を満たす正値の関数 $f(x)$ を任意に選んで確率論を築くことができる。しかし、すぐにわかることだが、関数 $f(x)$ が1の場合が特に興味深く、それに対応する確率を標準的と格付けすることは妥当である。連続体の等質性を考察した人はこの指摘を納得するだろう。もしも 0-1 線分を 10000 の線分に等分するとき、それぞれの線分は同じ性質を持つものと考えなければならず、したがって、それぞれの線分の確率は他のどの線分とも同じ確率であると考えなければならない。

このことは、次のように言い換えることができる。小数点以下の最小の数字が $0, 1, 2, \cdots, 9$ の一つの数と同じである確率は、他の数と同じである確率と同じでなければならず、従って 10 分の 1 でなければならない。最初の数字が決った場合に、同様の推論を、二番目の数字に、そして三番目の数字に、等々と続けることができる。十進法における十個の数字のいずれも、選ばれる確率は常に他の数字と同じであり、その共通の確率は確かに十分の一となる。

0 と 1 の間にある到達不能な数の研究は、次の可算確率過程の問題を調べることと同値となる。その問題は、試行回数は可算無限、各試行には10個の事象があり、各事象の確率はいずれも同じで、その共通の値は十分の一であるような。

たとえばロットの当選番号を選ぶときのように、それぞれの円板が10個の数字の内の一つを等確率で与えるようにして、可算無限回の抽選を考えることができる。

このように問題を表現すると、これは、可算確率論における最も単純な問題で、確率論の誕生と同時に重複試行問題という名の下で研究されてきた。ベルヌーイの大数の法則という名で有名な結果は、試行回数が限りなく増大するとき、「好ましい場合」と呼ぶ特定の場合が起きる頻度は、その場合の確率に近づくというものである。

われわれが考えている問題では、たとえば、数字7が現れることを「好ましい場合」とすると、大数の法則により、この好ましい場合の頻度は、試行

の回数が限りなく増大するときに、極限 $\frac{1}{10}$ に近づくことがわかる。

可算確率論は、大数の強法則により、ベルヌーイの結果を精密にすることができるが、この点について強調するだけの紙数はない。

もっと重要な事実は、同様の計算を、十進少数における連続する数字列についても行うことができる、ということである。位置が固定された相続く n 個の数字が、与えられた n 個の数と一致する確率は 10^{-n} である。特に、この n 個の数がすべてゼロの時も同様である。連続する n 個の数の組は可算無限個あるので、これらの組は「好ましい事象」である与えられた数の組と一致する回数は無限にあるであろう。それぞれの n 個の数字の組の現れる頻度は、考えている組の数が限りなく増大するときには、極限 10^{-n} に近づくであろう。

相続く n 個の数の組すべてについて上で述べたような条件を満すような無限十進小数のことを、十進記法に関する正則数と呼ぶことをわたしは提案した。それらの数については、与えられた連続する数の組が現れる頻度は、確率論の計算と大数の法則から導かれる[3]。第 5 章で、種々の数記法に関連して、正則な数と絶対的に正則な数とについての一般的な問をを再び取りあげるが、当面は、十進記法に限定して考えることにしよう。以上のことから、0 と 1 の間で偶然に選ばれた数は、正則な到達不能な数であると断言してよい。

到達可能な無理数が正則数であるかどうかという問いは、数論において最も熱意を引きつける問いの一つであるが、解決までは程遠いように見える。というのは、そもそも、どちらの方が正しいとして取りくめるのかが全く予想できないからである。言えることは、π や e や $\sqrt{3}$ のような数を考えるとき、これらの数と、十進記法の基である数 10 との間にどのような関係も見えないということだけである。したがって、これらの数の十進展開が、数字 7 が数字 0 よりも頻度が大きいというような類の特異性を持つというのはありそうにもない。しかし、この推論は証明ではないし、また、$\sqrt{2}$ や $\sqrt{5}$ のような数には適用できない、というのは、2 と 5 は 10 の約数だからである。しかし、これらの数の十進展開に現れる数字は偶然の法則によく従っているように見えるのである。

この重要な問題については、第 5 章で再び考察することにする。

[3] ある場合は、n 個の数の連続する組をすべて考えるが、ある場合には、最後の数字の場所が n の倍数であるような組だけを考える。しかし、いずれをとるにしても、実際には重要な違いは全くない。

3.5 測度と確率

0 と 1 の間の点がある条件を満す確率、すなわち、その条件で定義される集合 E に属する確率は、集合 E の測度の定義と計算法に直接結びついている。ここでは集合の測度の一般論を解説はしない。その理論に、この叢書の中の多くの本が、全体として、あるいは部分的に、割かれている。ここでは、区間の測度はその長さと一致すること、区間が 0-1 領域の中に含まれるときは、0-1 領域内のランダムな点がその区間に含まれる確率がその測度と等しいことを注意するだけに留めておこう。

ルベーグが可測と呼んだ集合 B の測度を構成的に定義するとき、互いに交じわることがない有限個あるいは無限個の区間の和集合を考え、その測度は、各区間の測度の和に等しいとする。一方、集合 E_1 と集合 E_2 の測度がすでに定義されていて、E_2 が E_1 の部分集合であるとき、E_1 の点で E_2 には 属さない点の集まりである集合 $E_1 \setminus E_2$ の測度は、E_1 と E_2 の測度の差であるとする。今使った二つの操作、すなわち、互いに交じわらない可算無限個の集合の和を作る操作と、一方が他方に含まれる二集合の差集合を作る操作は、有限回、あるいは、可算無限回繰りかえすことができる。

ここで一つの例を取り上げることにする。この例を通し、零集合というとても重要な概念を導入でき、また、一つの平行移動だけでなく可算無限の平行移動を考えるような場合に、ユークリッド的な意味で等しい、とはどういうことかを考える立場から興味深い性質のいくつかを紹介することができる。

0 と 1 の間にある無限十進小数の中で、数字 5 が現れないものを考えよう。小数点以下第 n 位まで 5 が現れない確率は明らかに

$$p_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

である。

この確率 p_n は、n が限りなく増大するときに 0 に近づくので、数字 5 が現れない確率はゼロである。

この結果は次のような区間を次々と構成していくことでも容易に得られる。小数点以下第一位に 5 がある数のなす区間、小数点第二位に 5 がある数のなす区間、等々。

もしも、数字 5 が小数点以下第一位にあるとき、対応する点は 0.5 と 0.6 の間にあり、対応する区間は図 1 の斜線部分で表示されている。5 が小数点以

下第一位にないとすると、第一位の数字は、他の 9 個の数字 0,1,2,3,4,6,7,8,9 のいずれかであり、第二位の数字が 5 となるには、数 x は、図でやはり斜線で示した 9 個の区間

$$0.05, 0.06;\ 0.15, 0.16;\ 0.25, 0.26;\ 0.35, 0.36;\ 0.45, 0.46;$$

$$0.65, 0.66;\ 0.75, 0.76;\ 0.85, 0.86;\ 0.95, 0.96$$

のいずれかに含まれなければならない。

次にわかることは、小数点以下第二位まで 5 が現れないとすると、各位毎に 9 個の可能性があるので、両方を合せると 9^2 の可能性があり、この、それぞれの可能性、たとえば、0.07 や 0.23 や 0.40 に対し、区間 $0.075, 0.076$ や区間 $0.235, 0.236$ 等のような、長さが千分の一である区間が対応する。これらも、本来なら、図で斜線で示めすべきものである。各位の数字について同様のことを続けることで、諸区間の斜線で覆うことになるが、その長さの合計は

$$L = \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9^2}{10^3} + \frac{9^3}{10^4} + \ldots + \frac{9^n}{10^{n+1}} + \ldots,$$

となり、その和は 1 と等しいことは容易にわかる。こうして、再び、次のことがわかった。すなわち、十進展開に 5 が現れる数の集合 E の確率 (あるいは測度) は 1 に等しく、したがって、その補集合の測度は 0 に等しい、すなわち、十進展開に 5 が現れない数の集合の測度は 0 となる。集合 E の測度は 1 に等しいというのに対し、その補集合は零測度であるという。

E を形成する諸区間の全体の長さ L は 1 に等しい。従って、それらを平行移動して、与えられた区間 0-1 を覆うようにできる。従って、ユークリッド的な観点からは、この区間は、構造は違うものの、集合 E と同じであるとみなされる。

この集合 E は、諸区間 I から構成されている。これらの区間は 0-1 区間内でいたるところ稠密である、つまり、区間 0-1 のどんなに小さな部分でも、これらの中のある区間に含まれるか、あるいは、その内部に無限個の区間を含む。しかし、一方、これらの区間は互い外部にあり隣接することはなく、それらの間には E に属さない点が無限個ある。すでに確認したように、これらの区間の一つの境界は、

$$0.73027465 \text{ と } 0.73027466,$$

のような十進小数で、この例では、小数点以下の 7 つの数字は 5 ではない。区間の左の端は 5 で終わり、右は 6 で終る。しかし、左端を数字 5 を使わな

いでも書くことができる、というのは、

$$0.73027465 = 0.730274649999\cdots$$

だからである。

したがって、E を構成する区間の端点は、それぞれ、補集合に属している。そして、これらの端点の極限点もまた補集合に属することがわかる。また、逆に、補集合の点はすべて、これらの端点の極限点となっている。従って、この補集合 CE は完全集合となる。というのは、E のどの点も、ある区間の内点となり、端点とは一致しなので、諸区間の境界点の極限点にもならないし、これらの区間の外部にもならない。

完全集合 CE は、連続濃度を持っている。実際、CE と 0-1 区間の上への一対一の対応を作ることはとても簡単である。実際、CE の点の目盛は、数字 5 が現れない無限（あるいは有限）十進小数

$$(a) \qquad 0.492370647\cdots$$

となるが、他にはどのような条件も課せられない。もしも、この展開の中で、5 以上の数字を 1 だけ減らすと、

$$(b) \qquad 0.482360546\cdots$$

となり、この数 (b) を 9 進法で考えると 0-1 区間の中の任意の点となる。逆に、9 進法で書かれた数 (b) に対し、5 以上の数字に 1 を加えたものが十進法で表示する数 (a) を対応させるのである。

集合論の用語を使うと、カントールに従い、集合 CE は、0-1 の間の点の集合と同様に、連続濃度を持つと言うことができる。これらの集合は、一方を他方から、点 (a) と点 (b) と合わせることで得られるが、ユークリッドの意味では同じではない。実際、ずっと以前から、平面上の異なる線分の間に、そういう一対一の上への対応を付くることができることは知られていた。それには、相似変換

$$y = 2x$$

を使えば十分である。同様に、

$$y = \frac{1}{x}$$

という変換を使うことにより、0-1 区間内の点の集合を、0-∞ という無限区間上の点の集合に一対一に対応させることができるが、後者には、0-1 区間と同じ区間が可算無限個含まれている。

これらは古典的な結果であるが、カントールは予想外の結果をえた。すなわち、正方形 (あるいは立方体、等) の内部の点の集合も、直線上の線分上の点の集合と同じ濃度であることを示めした。

したがって、濃度の概念と、ユークリッド的な等しさとを区別することが重要である。後者は、カントールの意味での濃度数だけでなく、空間内での位置も考慮するのである。

最後に、数字 5 を含まない数の集合 E を構成する区間を使って区間 0-1 を再構成できる、という逆説的に見える結果をユークリッド的な立場から説明しよう。なぜ逆説的というかといえば、集合 E は 0-1 区間を覆わず、実際 CE の中の連続濃度の集合を残すからである。

したがって、わたしたちは、この集合 CE が零集合であるがゆえ、直線上の点や平面上の直線のように、尺度の観点からでも無視すべきことを認めなければならない。実際、三角形や多角形の面積を定義するとき、それらの境界にある直線は勘定に入れない。それらは、状況の応じ、領域の外部あるいは内部に自由に組みこむことができるし、そうしなければならない。もし、それを認めないとすると、2 つの三角形を並べて一つの三角形を作るときに、その面積が 2 つの三角形の面積の和となる事実の前に困難に陥いることになる。このことは、2 つ、あるいはそれ以上の区間を並べるときの、それらの端点についても同じである。幾何学的な点は、境界や極限としては存在するが、その長さはゼロである。したがって、それは、確率の問題や、連続体にかかわる測度の問題では、無視すべきであり、同様に、可算集合や零測度の非可算集合も無視すべきである。

従って、集合 E が、0-1 区間全体と同等で、可算無限個の平行移動により、この全体区間と一致させることができる、という結果は、パラドクシカルと考えるべきではない。それに、E を構成する区間の集合 I の各要素は長さを持っており、それらは、先程 L と書いた収束級数を形成し、その和は 1 となる。この級数が収束することより、どのような数 ε が与えられようとも、その級数の有限個を選び、その和が $1-\varepsilon$ より大きくなるようにすることができる。従って、ε がいかに小さい数であっても、有限個のユークリッド的平行移動を E 属する区間にほどこすことで、0-1 区間を ε を除いて覆うことができる。こういう理由で、E と 0-1 区間のユークリッド的な同等性を主張することができる。

3.6 到達不能数の測度

先程与えた例に限って考えることにしたい。というのは、その例の背景を詳細に説明してきたので、読者が他の場合を、必要があれば集合論や測度論の本を利用しながら、深く調べることが可能であると考えるからである。特に、次の集合について読者が調べることを勧めたい：十進展開に数字 5 が有限回しか現れないような数の集合、十進展開をどんどん続けるときに 5 が現れる頻度が、次第に $\frac{1}{10}$ 以外の数、たとえば、$\frac{1}{11}$ や $\frac{1}{9}$ に近づくような数の集合、あるいは、その頻度が収束せず 2 つ不定な数 a と b の間を振動するような数の集合など。このいずれの場合でも、定義される集合は零測度であり、しかも到るところ稠密である、すなわち、その閉包は 0 と 1 の間にある数をすべて含む。

なお、ついでではあるが零集合の分類は興味ある問題であることを指摘しておきたい。これについては、私の「集合論」を参照していただきたい。

さて、前の節の例に戻ろう。われわれは、測度 1 の集合 E と、零集合である、補集合 CE を考えた。明かに、集合 E は、絶対的に到達不能な数の大多数を含んでいる。というのは、到達可能な数は有限個か高々可算無限個なので、絶対的に到達不能な数は、どの区間でも、ほぼ全体を形成するからである。

しかし、すでに見てきたように、CE の点は (b) の形に表現でき、9 進法で表現した 0-1 区間の点と全単射的に対応する。従って CE の本質的な部分は絶対に到達不能な数で形成されていることがわかる。一方、CE の点は、数字 $0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$ しか入っていない壷から抽選を繰りかえすことで得られる。このことから、CE の点が、直接的に到達できる数の中には含まれないことがすぐにわかる。しかし、この帰結は、5 章で種々の数記法を同時に使うことで示されるが、その際、数記法の意味を、より広く考える必要がある。

このように、集合の測度に関する理論はすべて到達不能数に役にたつものと考えることができる。もしも、そのような数を個別に考えるとができないのであれば、それらの数全体の中での確率、あるいは、その中の特定の部分集合の中での確率の問題を考えることができる。こうして、ある種の問題への回答が確率の値として与えられることになる。この種の回答は、科学の多くの問題においては、しばしば、興味深いものである。

Chapter 4

可算集合の異質性

4.1 可算集合における確率

前の章で、確率の問題を考察した。それは、連続体からの選択の確率に関する問題であるが、可算集合上の確率の理論に帰着することができた。というのは、これは、10 個の数字 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ を等確率で選ぶという単純な問題を可算個つなげたものだからである。この問題は、可算確率論では、第一類の問題と呼ばれている。これに対し、第二類の問題は、選択の可能性が可算個あり、各選択肢の確率のなす級数が収束し 1 となる場合にかかわる。

この条件が必要かどうかを疑問視する著者が居た。可算集合の要素が必ず相異なる確率を持つアプリオリな理由はないと異議を唱えた人たちも同様である。

この視点は私には受けいられないことを後で言うが、この視点を理解することをまず試みよう。

上のことを心配する人は次のような理由を述べる：可算無限は、n が無限大になるときの n 元集合の極限である。同じ対象ということなら、それらの確率は同じとなり、それぞれ $\frac{1}{n}$ となり、これらの n 個の和は 1 に等しい。さて、もしも n が無際限に大きくなると極限においてゼロと等しい確率を得る。これらの確率の和は、それらに共通する価と、それらの数の積となり、従って、

$$0 \times \infty$$

という形をとるが、数学者はこの記号列の値は不定であると考える。しかし、

この不定性を排除することは、値がすべて $\frac{1}{n}$ の n 個の数の極限となる場合を考えれば簡単である。上の積の本当の値は、このとき、積

$$\frac{1}{n} \times n$$

の極限となるが、これは常に 1 だから、極限も 1 となるのである。

この結論は次の事実と矛盾しない。その事実とは、各項がゼロに近づく級数の値は、項数が無限にあっても、値はゼロに近づくことがしばしばあるという事実である。たとえば、一様収束する級数の場合がその典型例である。しかし、最初の n 項が $\dfrac{1}{n}$ で、他はゼロであるような級数は、各項はゼロに近づくが、級数の値はゼロには近づかない。

できるだけ公平に以上の主張を説明したつもりだが、私自身はこの主張に納得できない。しかし、以下のことを急ぎ足になるが言っておきたい。私は、その主張を馬鹿げていると考えるべきだとは思ってはいない。ある程度、論理的で一貫している主張を私が認めない理由は実践的な観点からのものである。これまでのところ、可算集合における確率の上記のような定義が、数学的問題の解決に利用できるような結果をもたらした例を挙げることは誰もできないと私は思う。あとで、なぜそうなるかの理由と思われることを説明したい。すなわち、この定義は、論理的には馬鹿げたものではないとしても、不毛で役に立たないであろう理由を説明したい。

4.2　確率が等しいという概念の吟味

しばらく、可算集合の要素が同等の確率を持つという等確率原理を受けいれてみよう。可算集合の要素は、定義により自然数列によって番号付けられるので、可算集合を自然数列と同一視することができる。そうすると、問題は、次のような自然数の選び方が定義できるかどうか、あるいはそれ以前に、そういう選び方を想像することができるかどうか、を明らかにすることとなる。ただし、その選び方とは、どの 2 つの自然数も同じ確率を持つようなものなのだが、その共通確率は、和が 1 を越えることができないのでゼロでなければならないことに注意してほしい。

しかし、もしも各数が選ばれる確率がゼロに等しければ、その確率の有限和もゼロとなる。したがって、$a = 10^{10}$ 以下の数を選ぶ確率はゼロであるだけでなく、$b = 10^{a}$ 以下の数を選ぶ確率もゼロ、$c = 10^{b}$ 以下の数を選ぶ確

率もゼロ、以下同様、となる。「以下同様」の意味は、われわれの論法が、どんな到達可能な数についても妥当する、ということである。もしも A がそういう数であれば、勝手に選んだ数は A 以上となることは確実であると考えなければならない。なぜなら、それが A 未満となる確率はゼロだからである。

こうして、偶然に選び得る数はまさに到達不能数だけであることがわかる。すなわち、余りにわれわれから遠く離れているために、それを正確に定義できるような状態にわれわれは置かれていないような数だけが、偶然に選びえることになる。[1]

選択のメカニズムを考えると、等確率原理への批判はもっと説得力を増す。ただし、選択のメカニズムとは、有限の数をランダムに定義するために使えそうな方法のことである。この選択が、連続体からの選択よりはるかに難しいように見えることは不思議に思われれるかもしれない。というのは、連続体の場合には、0 から 9 の中から数を籤でひくことを繰りかえすことで満足のいく結果が得られていた。そこで、次のようなことは可能かどうかを考えてみよう。すなわち、不自然であっても容認できるような回り道を通して、0 と 1 の間からランダムに通約不能な数 α をまず選び、次に α からランダムに選んだ数 n を対応させせることはできないだろうか。実際、無理数 α を使って、無限個の自然数を定義することができるので、その中から、一つの自然数を選ぶ明確な方法を指定すればよい。当面、α を選ぶことの困難は無視することにしよう。もちろん、この困難は現実には克服できそうもないのではあるが。当面、ツェルメロの公理を認める人達の視点に立つことにして、数 α が定義されていると考えられるだけでなく、その十進展開や連分数展開について議論できるとしよう。しかも、あたかも、この無限展開全体を私たちが完全に知っていて、たとえば、連分数の不完全商の中に与えられた数が与えられた回数現れるかどうか、あるいは、無限回現れるかどうかを知ることができる、という立場をとろう。

このとき、a_n を n 番目の不完全商とするとき、不完全商として無限回現れる自然数の中で最も大きいものを考えることができる。しかし、知られているように、ある測度ゼロの集合があって、それには属さない α については、すべての自然数が不完全商として無限回現れるので、上の定義はほぼ必ず無限大の数を定義することになり、定義は機能しないことになる。

もっと一般的に、不完全商 a_n と n の関数 $\varphi(a_n, n)$ を定義し一方、n の関

[1] 訳注: これは、上の原理が馬鹿げていることを意味していることの傍証と、ボレルは考えている。

数 $\psi(n)$ を定義し、

$$\varphi(a_n, n) > \psi(n) \tag{1}$$

を満す n を考えよう。もしも、そのような数 n が有限個しかないときは、それらのなかの最大値または最小値を選び、ある関数 $f(a_n, n)$ の値を α に対応させればよさそうである。ただし、もしも、そのような n が無限にあるときは、上の操作がうまく行くような関数 φ と ψ を捜さなければならない。

しかし、α がランダムに選ばれたとき、不等式 (1) が成り立つ確率を p_n とすると、可算確率論によれば、級数 p_n が収束するか発散するかによって、2 つの場合を区別しなければならない。最初の場合、つまり、級数が収束する場合は、不等式 (1) が無限回成り立つ確率はゼロであるが、後者の場合、すなわち級数が発散する場合は、不等式 (1) が無限回成り立つ確率は 1 である。どの級数も収束するか発散するかのいずれかなので、他の選択肢は存在しない。

もしも発散する場合には、不等式 (1) は、一般に無限個の n の値について成り立つので、私達に可能な唯一の方法は、これらの中で最も小さい値を選択するか、決められた数列、たとえば 1000 個の数を小さい順に並べた数列、から一つの数を選ぶしか方法はない。しかし、いずれの場合にも、こうやって選ばれた数や、対応する数 $f(a_n, n)$ が極めて大きい確率はとても小さい。すなわち、到達不能な数が選ばれる確率は到達可能な数が選ばれる確率よりも小さい。

一方、収束する場合には、明かに関係（1）を満す n の有限個の値は到達可能であり、前節の結論は、当然、成り立つ。

実際、収束する場合は、好ましい場合が m 回繰りかえされる確率は有限の数 p_m で、しかも級数 $\sum p_m$ は収束し和は 1 となることがわかる。従って数 m を定義する確率は m とともに減少する。一方、発散する場合は、p_m はいつもゼロなので、数 m を定義することができない。

結局、実際には実現が不可能にみえる方法も含めて、想像しえる方法のいずれも、小さい自然数には有限の確率を与え、しかも もっと大きな数を得る確率は小さい。そうでなければ、すべての自然数 n に対する確率はゼロであり、n の無限値に対しては確率 1 を与える、すなわち、数 α に対し、n のどの有限値も対応しない。

もちろん、私達が試みた方法よりももっと複雑な方法を考えることはできるが、それを詳しく吟味すれば、可算確率論の基本法則により、いつも同じ結論となることは容易に想像がつく。すなわち、どの n の確率もゼロとな

り無限の確率が 1 となるか、あるいは、無限の確率はゼロとなり n の確率 p_n が 1 を和とする収束級数となるかのいずれかである、という結論が得られるであろう。

4.3 公理的方法

前節の議論では完全には満足しない人達は、可算集合における確率の定義において公理的な方法を用いる権利を要求するかもしれない。実際、無限集合での議論となった途端に、どの経験も実行不能である以上、連続体における確率の定義の場合にしばしば採用したと同じように、無矛盾であるという以外には何の制約もない勝手な定義を採用できる、というスタンスを取ることも可能であろう。

したがって、可算無限個の事象の各々に勝手な確率 p_n を与え、それらの確率が和が 1 の収束級数となるようにすることができる一方、各事象の確率は同じであると決めて、その共通確率はゼロ以外にはなりえないことは気にしないようにすることもできる。後者の仮説に対する異論はすでに説明したが、簡単に繰りかえすと、到達不能な数は到達可能な数に比べる無限に多いために到達可能な数は決して選ばれることがなくなる、という異論であった。一方、前者の仮説では、到達不能な数は決して選ばれることがない、という異論を述べることもできる。というのは、与えられた収束級数 $\sum p_n$ が何であっても、到達不能な数の全確率は無限に小さいからである。

一方、この公理的方法は、可算集合から要素を選ぶ実際的方法を一切与えないという重大な欠陥がある。そこで、単純な抽選を利用して、自然数が大きくなると確率が減少するが決してゼロにはならないような、自然数の選びかたを、これから調べたい。

4.4 自然数からの実効的選択

この選択の方法で最も単純に見えたものは、0 と 1 の間の勝手な実数 α の連分数展開の最初の不完全商を用いる方法であった。もっとも、連分数について知っている必要もないし理論を使う必要もない。単に、自然数 k は、

$$\frac{1}{k+1} < \alpha < \frac{1}{k}$$

をみたすとき選ばれる、というするだけである。

　したがって、選ばれた自然数 k が、

$$1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$$

と等しくなる確率は各々、

$$\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}, \cdots, \frac{1}{n \cdot (n+1)}, \cdots,$$

となり、これらの和は 1 となる。

　数 α をランダムに選ぶには、十進数字を各数字の選択確率を 10^{-1} としてえらべばよい。もしも、たとえば

$$\alpha = 0.153 \cdots$$

が選ばれたならば、

$$6\alpha < 1,$$

$$7\alpha > 1,$$

だから、α は $\frac{1}{6}$ と $\frac{1}{7}$ の間にあるので、選ばれた数は 6 となる。

　大きな数が選ばれるのは、選ばれた数字の最初の数がすべてゼロの場合だけである。たとえば、

$$\alpha = 0.0000017 \cdots$$

のときは、

$$500\,000\alpha < 1,$$

$$1000\,000\alpha > 1,$$

なので選ばれた数 n は 500 000 と 1000 000 の間にある。もっと正確に確定するには、さらに数字を抽選しなければならないが、一般には、ゼロではない数をいくつか抽選すれば十分である。

　上のような数の選びかたは一般には受け入れがたいように見えるであろう。というのは、

$$1, 2, 3, 4$$

が選ばれる確率は、それぞれ、

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \cdots,$$

となり、数ごとで余りに違いすぎるからである。それにもかかわらず、この方法を説明したのは、これを出発点にして、もっと受けいれやすい確率を与える選び方を容易に得ることができるからである。

そこで、かなり大きな数、たとえば百万を固定し、百万以下の数は同じ確率であるようにしよう。それだけでなく、続く、各百万個の数の一群についても、同様であるようにする。そして、これらの百万個の数の一群が選ばれる確率が、前節で説明した方法で個々の数が選ばれる確率となるようにする。従って、ランダムに選ばれた α から数 3 が選ばれたときは、数 n は、2 000 000 と 3 000 000 の間から、宝くじの抽選のときのように 6 個の数字を引いて決めることができる。

従って二種類の抽籤を行うことになる。最初は、数 α を決定するために、数字を籤で引くことを続けなければならないが、最初にゼロを続けて引く回数が大きくなると、かなりの回数、籤を引かなければならない。この回数は、数字達が簡単な分数を決める小数と同じように並ぶ場合、たとえば、

$$\frac{1}{9} = 0.111111\ldots$$

のように並ぶ場合には、極めて大きくなる可能性がある。実際、最初の抽籤結果がすべて 1 である場合、0 か、2 以上の数を抽籤するまで続けなければならない。前者の場合には $9\alpha < 1$ となり、後者の場合に $9\alpha > 1$ となる。したがって、実際に行わなければならない回数はあらかじめ固定しておくことはできないが、この回数が無限となる確率はゼロである。すなわち、数が決定するまで限りなく抽籤を続けなければならない確率はゼロである。n 個の最初の数字が、あたえられた n 個の数字（たとえば、上の例の場合であればすべてが 1）と一致する確率は、$\dfrac{1}{10^n}$ であり、n が増えると、これは急速に減少する。

最初の抽籤が実施されたならば、選ぼうとしている数が属する百万の連続する数の最大値が確定するので、あとは、6 つ数字を上に述べたように抽籤すればよい。

以上、詳しく述べた方法は、単に例として挙げただけであり、いろいろな仕方で修正できる。

たとえば、最初の抽籤で数字 2 が選ばれたとき、先程のように二番目の一連の百万個の数ではなく、百万から十億までの 9 億 9 千 9 百万個の数を選ぶことにし、最初は、0 から 9 までの 10 個の数字から抽籤し、2 回目も 3 回

目も同じように抽籤するが、もしも最初の二回の抽籤結果が共にゼロのときは、3 回目の抽籤のときは数字 0 を除外し 1 から 9 までの数字から抽籤する。そして、最後に残りの 6 回は 10 個の数字から抽籤する。数字を 6 回抽籤することで、000 000 と 999 999 の間の数が得えられるように、上のようにして 1 000 000 から 999 999 999 までの数が得られる。ここで、いろいろな取りきめが可能である。一番簡単なのは 0 を自然数の中に加えることで、そのとき、0 は $1, 2, 3, \ldots$ と同じ確率と持つ。

別の取りきめとしては、百万までのロットのときと同様に、000 000 を 1 000 000 と同じであるとすることである。同様に、79 数字については、1 000 000 を 1 000 000 000 と同じであるとするのである。

あるいは、また、単純に結果に一を加えることもできる。この場合は、0 から 999 999 までの数は、1 から 1 000 000 までの数となり、1 000 000 から 999 999 999 までの数は、1 000 001 から 1 000 000 000 までの数となる。

一般に、α を抽籤してから決る数を n とするとき、n が 1 より大きいとき、十進表示の桁数が $3n$ から $3(n+1)$ の間の数を選ぶことになる。あるいは、桁数が $6(n-1)$ から $6n$ の間の数を選ぶことにしてもよい。そうすれば、c を桁数とするとき

$$6(n-1) < c \leq 6n,$$

とかけば、$n = 1$ のときでも妥当する規則となる。

どのような規則を選んでも、個々の数がえらばれる確率は、その数が増大するとき明らかに急速に減少する。というのは、同じ桁数の十進数は同じ確率となるようにしたが、同じ桁数の数の個数は、桁が増大するときに、どんどん増えるからである。

4.5　到達不能な数の場合

以上のことからわかることは、到達不能数のように桁数が極めて大きな数になると、各々の数の確率は余りに小さくなるので、どいうときでも無視できる確率の類に属することとなる。到達不能数の集合についても、前節で導入した取りきめでは、同じことになる。到達可能数の確率はすべてゼロとなる場合と、余りに対照的な状況であるので、これらの二極端の平均的を考えることが良いかもしれない。

そこで、この種の考えから提案できることは以下のようなものである。前節で提案した確率は整数全体で和をとると 1 であったが、この確率を半分に

することにしよう。そうすると確率の和は $\frac{1}{2}$ となるので、到達不能整数の全体に確率 $\frac{1}{2}$ を与えることができる。なお、その際、この確率を到達不能数一つ一つに分ける必要はない、というのは、到達不能数は互いに区別しないと決めているからである。もちろん、到達不能数の個数は余りに多いので、それらに、全体の確率 $\frac{1}{2}$ を分配したとしても、個々の数の確率は、到達可能な数の個々の確率よりも、ずっと小さい。

簡単のために、私達は前節で到達不能数に与えた確率の全体を無視することにしたい。そのときに出会った困難は簡単な方法で解決できることがわかる。

すなわち、まず始めに、同確率の二事象のいずれかを籤で決める。たとえば、コインを投げ、裏が出たときは前節で説明した方法で到達可能な数を選び、表が出たときは到達不能数のどれかを選ぶが、どの数かは決める必要はないと決めればよい。

もちろん、いま説明した方法には恣意性があり、到達不能数を選ぶ確率 $\frac{1}{2}$ をもっと小くしたり大きくしたりすることができる。

たとえば、後者の選択肢を採用し、到達不能数を選ぶ確率を 0.999 とし、到達可能数を選ぶ確率を 0.001 とすると、どの自然数も同じ確率で選ばれ従って確率はゼロであるという観点に近づく。しかし、二つの観点の間には、次の意味で、根本的な違いがある。すなわち、われわれが退けた方の観点では、到達可能数全体の確率はゼロとなり、到達可能数を一つでも得る可能性が全くなくなるのだが、これは全く馬鹿げたことである。

逆に、何らかの問題において、到達可能数の確率を $\frac{1}{100}$ に減少させることは、その問題において、到達不能数が果す役割が極めて大きいが、到達可能な数も決して除外されておらず、それらも一定の役割を果す、という事を意味する。

4.6

この章では、可算集合からの無作為な選択を定義する問題について調べたが解決はしなかった。一見すると易しそうに見える問題だが、その外見に反し、この問題は、連続体から無作為に要素を選択する問題よりは難しく、実際、単純で自然な定義で他の定義よりは明かに優れている、というようなものは存在しないのである。

そこで、一つの解決法ではなく、解決法をいくつか提示し、少くともそ

れより優れた方法を他には思いつかないような方法を、その中から選べるようにした。

たとえ、理論的には、可算集合からの選択が、連続体からの選択と比べて、より複雑であるとしても、実践的な視点からすれば、逆に、より単純である。

実際、一つの具体的選択法を選ぶと、何回か籤を引くことになる。籤を引く回数が有限であるということを確定的に言うことはできない。というのは、その回数の上限を提示できないからである。しかし、この回数は一般に小さいことを断言できる。すなわち、与えられた整数 A より、回数が小さい確率は、A がどんどん増大するとき、急速に 1 に近づく。

回数が実際に無限となるのは、到達不能数全体に正の確率を与え、それらの中の数を実際に選ぼうとするときだけである。この場合には、連続体から到達不能な数を選び出すときと同様の困難に出会うことになる。しかし、種々の記数法をテーマとする次章では、このような本の中で数行で具体的に正確に定義できるような到達不能な整数を、いろいろな視点から特徴付けることにする。

Chapter 5

種々の数記法

5.1 十進法

種々の数記法、すなわち、自然数や分数や無理数を比較的単純な形式で表現する方法を調べる前に、最も馴染みのある十進法についてまず調べることは無駄ではあるまい。

この数記法は、その形ではアラブ人によって発明されたようである。しかし、わたし達が 2000 未満の数についてしばしば利用するローマ数記法も、実は十進法である、というのは、10 と、そのべきである 100 と 1000 が、特別な役割を果しているからである。

自然数を、その本数だけ棒を刻んで表現する棒記法と比べて、十進法が、通常の数と計算をどれだけ簡単にしたかを想起することは無駄ではあるまい。棒記法はすぐに役にたたなくなる。千を越える棒を刻むには場所がかなり要るし、そのように記された 2 数を比較することは、それぞれの棒に別の名前を与える方法以外には数の名前を言えない人には、時間がかかり面倒である。

しかし、わたしが逆に強調したいことは、次のことである。十進法の利用は口頭でも筆記でも、わたし達がいつも使っている比較的小さい数には極めて重宝するとしても、極めて大きな数の表示となると困難は全く変らないのである。

このことは、とても大きな個数の数字が必要なときを考えれば明らかである。もしも人間にとって a 本の棒を引くことが不可能であると考えるとするならば、もちろん a 個の数字を書くことは不可能であり、十進法で 10^a 以

上の数を書くことはできない。

しかし、比較的限られた桁数の数、たとえば 100 桁の数、を調べ定義しようとするときでも、以下のような困難が現れる。

100 桁の数を書くことは簡単である。数字を籤で選んでいくか、いわば頭の中で籤を引いて、いきあたりばったりに数を選んでいけばよい。このような本では、そのような数を二行で表せるので 1 ページに 20 個ほど書ける。したがって 500 ページの本であれば 10 000, つまり 10^4 個の数を書くことができる。

100 桁以下の数の全体の個数は 10^{100} である。もしも 500 ページの本がその中で 10^4 個を記載できるとすると、すべてを記載するのに、10^{96} 冊の本が必要となる。立派な建物を占める重要な図書館は、百万冊の本を収蔵できる。したがって、10^{96} 冊の本を収納するには、そのような図書館が 10^{90} 館必要となる。

もしも、この地球上に十億人の人間が生きて居るとして、それぞれの人が、それぞれ、上のような立派な図書館を持っているとしても、100 桁の数をすべて得るには、わたし達のような星が 10^{81} 個必要となる。簡単な計算からわかるように、わたしたちの宇宙が、たとえ 10 億光年の広がりがあるとしても、そんなに沢山の星を容れることはできない。

以上から結論できることは、人類が今後十億年生き続けるとしても、100 桁の数をすべて知ることは人類には絶対にできない、ということである。100 桁の数全体の中で書くことができるのは、本当にわずかな部分しかないのである。

100 桁の数を知るには、どうすれば良いであろうか？上て示唆したような籤を引く方法では、得られた数の性質を知ることは全くできない。たとえば、その数を素因数に分解することは、素因子がすべて小さいならば、簡単にできる。

しかし素因子が 5 桁、6 桁、7 桁になると、既に計算済みの 10 000 000 までの素数表が必要となる。この素数表を使うと、かなり面倒で長くつらい計算の結果素因子を得ることができる（もちろん適当な計算器を使えば単純化されるだろう）。しかし、与えられた数が素数であったり、7 桁より多い桁数の素因子を 2 つ持つような場合には、学問の現在の到達状況では、それが素数であるかどうかを知る方法や、その素因子を求める方法は全く存在しない。

このようなことでもわからないので、100 桁の数が、3 つの立方数の和となるかどうか、4 つの平方数の和となるかどうか、あるいは、その数が偶数の

とき、2 つの素数の和となるかどうか、等のことを知ることは全くできない。

もちろん、かなり長いが実行可能な計算により、上で挙げたような性質を持つ 100 桁の数を定めることはできる。たとえば、3 つの立方数の和となるかどうか、4 つの平方数の和等々となるような数を定めることができる。しかし、その場合には、定義に使った性質以外のどのような性質も一般には確かめることはできない。一方、現在の学問の状況ででは、素数であることがわかる 100 桁の数を定義することは困難にみえる。

素数の列が有界ではないことを示すのに使われる方法を一般化すると、いくつかの素数が与えられたとき、そのいずれでも割れない数を形成することは容易である。たとえば

$$2.3.11.13.19.29.31.37.61.67.71 + 5.7.17.23.41.43.47.51.53.59,$$

は、この式に現れる 21 個の素数いずれによっても割れない。というのは、第一項を割るものは第二項を割らないし逆も同様だからである。したがって、この数の最小の素因子は 73 以上となる。

こうやって、最小素因子が既知の 3 桁の数よりも大きいような 100 桁の数を構成できる。しかし、そのような数が素数でない確率は、1 にかなり近い。

わたし達は、すべての反論を封じるように、100 桁の数を例として取りあげてきたが、読者がすでに気付いておられるように、もっと桁数が小さい数、たとえば 18 桁とか 20 桁でも、その全体の数は到達不能と考えることができるし、そう考えるべきである。それらの数全部を人類が実際に書いたりすることはできないし、それらの数の大部分は、いつまでもわたし達には知られないままであろう。その桁数の数を書くことは、たとえば籤引きなどの方法で、簡単にできるが、その数について、どんな性質も知ることはできない。したがって、前章の終りの方で提案したように、到達不能な数の全体の確率を与えることが自然なことがわかる。

十進法についての考察を終るにあたって、数の口頭表現、すなわち、数桁の数を言明するときの言葉、について若干述べておきたい。ふつうの言語では、この数表現は十億を越すことはほとんどない。すなわち、10 の 9 回目のべきが使われることは決してない。

これらの語はヨーロッパの諸言語の中で多様な意味を持つ。フランス語では、billion は milliard（十億）と同等で、trillion は、billion の千倍[1]、quatrillon

[1]訳注: したがって 1 兆 10^{12}

は trillion の千倍[2]、以下同様、となる。フランス語の辞書は、quintillion[3] を越える数は記載していないか、せいぜい sextillion[4] までしか記載していない。しかし、この語は続けることもできる。décillion [5]からは、onzillion のかわりに、décimillion [6], décibillion[7], décitrillion[8], そして、vingtillion[9], trentillion[10], 等々と続けられる。この方法でいうと、cinquantsextillion（５６リオン）は $10^{3(56+1)}$ を表す。他の国、特にドイツでは、billion は、million の百万倍[11] で、trillion は、billion の百万倍[12]等々となっている。したがって、上の cinquantsextillion は、$10^{56\times 6}$ となる。以上より、口頭の数表現は、10 という基以外に、二次的な基として 1 000 と 1 000 000 を用いていることがわかる。

以上のような約束をすれば、口頭の数表現はかなり遠くまで行くことができる。しかし、この「かなり遠く」も無限との関係からすれば何ものでもなく、繰り返しを継続して定義できる数 (§1 参照) を得るには、繰り返しの回数が余りに多くなって想像することもできないようになることを避けるために、新しい約定が必要となる。こうして、数を実際に表現できないことを通して、ある種の数がどこから到達不能となるかを評価できるようになる。

5.2 単純な数記法

十進法と同様の数記法で、基数が 10 以外の数であるものは単純な数記法と呼ぶことができるだろう。ここで基数とは十進法のときの 10 と同じ役割を果す数で、1 より大きな自然数であれば何でもよい。

単純な数記法では、まず、基数と同じ個数の文字をまず定義しなけれなならない。もしも基数が 10 より小さいときは、十進法の最初の数字のいくつかを使えばよい。基数が 10 より大きいときは、新しい文字を付け加え、たとえば、12 進法では、10 と 11 をそれぞれ a と b であらわさなければならない。

[2]訳注: 千兆 10^{15}
[3]訳注: 百京 10^{18}
[4]訳注: １０該 10^{21}
[5]訳注: 10^{33}
[6]訳注: 10^{36}
[7]訳注: 10^{39}
[8]訳注: 10^{42}
[9]訳注: 10^{63}
[10]訳注: 10^{93}
[11]訳注: 10^{12}
[12]訳注: 10^{18}

基数がもっと大きいときは、新しい数字を十進数で表示し括弧でくくるのが最も簡単なやりかたである。これは、二つのシステムの組み合わせとなる。なお、基数が 10 のべきのときには、このやりかたは新しいものとは言えず、通常の十進表示と全く同じになる。この節で以下考えるのは、あるアルファベットの文字しか使わないようなものにかぎるが、これは、アルファベット的な数記法と呼んでももよかろう。

この中で最も単純なものは 2 進法で、数字として 0 と 1 しか使わない。なお、余談だが、アングロサクソンの国々ではお金の勘定に、この数記法が十進法と併行して利用されている。たとえば、25 ドルや、18 セントは、$\frac{1}{4}$ や $\frac{3}{16}$ と呼ばれている。イギリスでは、もっと複雑なシステムが使われていて、1 ルーブルは、20 シリングで、1 シリングは 12 ペンスである。

二進法の話に戻るが、各桁が 0 であるか 1 であるかは同じくらい確からしく、それぞれが現れる確率は $\frac{1}{2}$ であると考えるべきである。したがって、0 と 1 の間にある実数はコイン投げの結果の可算無限列を表現する、あるいは、ルーレットの赤黒の結果の可算無限列と言ってもよい、ただし、ゼロを無視するとしてだが。人類が発祥してこのかた、数えきれない人々が、コイン投げやルーレットなど、勝ち負けのあるゲームをやってきた。もしも、各ゲームの結果を 0 に対応させるか 1 に対応させるかを決めることができ、さらに、ゲームを開始時によって時間順に並べることができるとしよう。ゼロと小数点の後に、ゲームの結果に対応する数字の 0 または 1 を時間順に書くと、これを二進小数とみることで、ゲーム全体の結果を 0 と 1 の間にある一つの実数で表すことができる。もちろん、ゲームの数は限られているので、この二進小数の桁数は有限であるが、人々がゲームを続ける限り毎日新しい桁をつけ加えていくことにする。このことから、0 と 1 の間に一つの実数が存在し、それを二進法で表現すると、過去に行ったゲームの結果と、人類がこの星に生き続ける限り続けるであろうゲームの結果の全体を、表すことがわかるのである。

この実数は無作為に抽出されたと考えてよい。というのは、その展開に次々に現れる数字は、上で考えたゲームの系列の各々のゲームの結果に対応しているからである。無作為に抽出された数のある桁から先が、すべて 0 であったり、すべて 1 であったりすること、すなわち、2 のべきの逆数となることは、不可能なこととして排除しなければならない。これは、コイン投げやルーレットが 2 人の間で行なれているときに、一方がいつも勝つことは不可能である、ということと同じことである。ここで注意したことは、ペテルスブルグの逆理と、ペテルスブルグのマルチンゲールの問題[13]を明らかにす

[13]筆者の「確率論の基礎」を参照のこと。

るのに役に立つ。

十進法を使って 0 と 1 の間の数を無作為に定義するやりかたは、どの単純な数記法を使っても可能であるが、これらの方法は同等であろうか。この問いは次のように表現できる。0 と 1 の間の十進小数を決めるのに、数字 0,1,2,...,9 から無作為に抽籤するとする。もちろん、無限回、抽籤することはできないが、あらかじめ与えた数よりは多い回数行うと想像することは可能である（これが無限の定義であった）。その後で、かなり面倒ではあるが、桁数が極端に大きくなければ実行可能な計算で、上で得た十進小数を九進小数に書換えることができる。こうして得られた九進小数では、小数点以下に続く数字は 9 個の数字 0,1,2,...,8 から選ばれている。ここで、次のように問うことができる。「以上の与えかたに基いて、小数点以下の与えられた桁、たとえば第 34 桁にある数字が、与えられた数、たとえば 7、となる確率を計算することは可能か。」答はとても簡単で、その確率は九分の一となり、9 個の数字は同じ確率を持つ。

実際、もしも、すべての数が九進法で表されていると考え、さらに、小数点以下の最初の 34 桁にのみ注意すると、34 桁目が 7 の数は 9^{33} 個の区間を定め、それぞれの長さは 9^{-34} であるから、その区間の長さの合計は九分の一となる。

ここで、十進法の数を無作為に定めるとき、その数に対応する点が与えられた有限個の区間に含まれる確率は、それらの区間の長さの和であることに注意すると、この点が、九進展開の第 34 桁が 7 である 9^{33} 個の区間のどれかに含まれる確率は九分の一となる。

以上のことから、10 のような一つの基数について一般的な数は、他のどの基数についても一般的であることがわかる。10 個の数からどれでも選んで良い籤を実行して得られる数が普通の数であることは確実であると言うこともできるだろう。しかし、別の推論も可能である。九進法で表現された数で、たとえば 5 以外の数字をランダムに選んで得られる、一般的ではない数 α を考えよう。この数 α を十進法で表現するとき、証明はかなり難しいと思うが、きっと一般的な数のように見えるであろう。ここで「一般的な数のように見える」という意味は、10 個の数字の出現頻度や、連続する数列の出現頻度が互いに同じで、数字については出現頻度が $\frac{1}{10}$、連続する n 桁の出現頻度が 10^{-n} となる、ということである。この問題については、複雑な数記法の中で最も単純である分数記法を調べるときに、もう一度取り上げることにする。

5.3 アルファベット記法

単純数記法のクラスで特に興味深いのは、アルファベット数記法である。この数記法は色々な定義の仕方があるが、最も簡単なものを説明するだけにしておこう。

フランス語の 26 文字を考えよう。フランス語や他のいくつかの言語（英語、イタリア語、スペイン語、スウェーデン語等）で書かれた本は、これらの文字を多量に含んでいる。文字はアクサンや他の記号で修飾されていることもあるが、それは無視する。他に、句読点、省略記号、括弧、横棒等などの記号もあるが、それも同様に無視する。大文字やイタリックは、それに対応する小文字と同じであるとみなす。最後に、テキストの中に、アラビア数字や、他の言語（ギリシア語やロシア語等）の文字があるときは、それらを無視する。つまり、それは存在しないものと見なす。ローマ数字は文字とみなすことができる。すぐ後で取りあげる、いくつかの難点をとりあえず度外視すると、フランス語（あるいは英語等）の本の 1 ページは 26 個の文字 $a, b, c, \ldots, x, y, z$ がならぶ列を与えるので、このページを 26 進法で書かれた数と考えることができる。ただし、a は 0 、b は 1、⋯、z は 25 を表すとする。

いくつかのページからなる本全体も、同様に、一つの数と見なすことができる。その際、いくつかの点を明確に決めなければならない。すなわち、タイトル、奥付や、裏表紙や本の最後にある種々の内容を考慮すべきかどうかを決めなければならない。各ページに通常あるラニングタイトルは無視して良いだろう。一方、脚注があるときは、それを特定する記号 (数字や文字で表される) は無視し、註の中身を本文の対応する部分に挿入することにしよう。

上記のような約束を決めることは、もしも一冊しか考えないのであれば、簡単で容易である。しかし、大きな図書館のすべての本に対応する数を順に決めていこうとすると、そう簡単ではない。それらの何冊かには個別の困難があって、それに対し明確な解決をしておかないと、本に対応する数の定義は正確ではなくなるであろう。しかし、こういった困難や、大きな図書館にある数百万の本を順番に並べる現実的な困難は度外視すると、各書籍に平均して百万文字（各ページ 2 000 文字で 500 ページ）があると仮定すると、以上のようにして一つの数を得るが、アルファベット数記法では、その数は 1 兆個の文字を含むが、その数は、その著者達と、印刷のために活版を作った人達の骨の折れる仕事によって定義されたものと言うことができる。

一冊の本に限ってみると、手にしている版は一般に多数印刷され、出版が余りにも昔でなければ何冊かは残存している。これらの本は一般に全く同じ

であり、通常避けがたい印刷ミスは、そのいずれの本でも同じである。もちろん、この印刷ミスを訂正しようとしてはならない、というのは、訂正する際に解決しなければならない困難を、さらに厄介なものとしてしまう危険があるからである。こうして、同じ版の本は曖昧さなしに同じ数を定めるが、その数は 26 進法でだいたい百万桁の数字となる。

このような数について数学者は何の興味も持たないことは言うまでもない。というのは、その数についての性質を何も示すことができないからだ。しかし、いまだかつて、十進法でこのような巨大な数を書こうとは誰も夢想だにしたことがなく、このように大きな数の多様性が如何に大きいものかを了解することは容易ではない。

その点、フランス語の本の例は、わたし達の想像力に訴える力がある。というのは、わたくし達は、本の１ページが持ち得る複雑さや豊かさが如何に大きなものかをよく知っているからである。図書館にある数百万の書籍には数十億の行があるが、引用が行われるとき以外には同じ行は全くないということを考えると、その多様性が限りない豊かさを持つことがよくわかる。

数の全ての性質を知る者がいたとすると、二つの 50 桁の数字は、その人には、フランス語で書かれた二つの行と全く同じように独特の個性をそれぞれ持つものと見えることであろう。

解析学で重要な役割を果す e や π のような数は、その十進展開にはどのような法則があるとも見えないが、それらの複雑な法則を見通すことができる者には、著名なソネットと同じように興味深く美しく見えるに違いない。特別な数記法では実際にそうであることが後でわかるが、一般には、たとえば円周率 π の十進展開を支配している神秘的な法則を知ることはできない。

5.4　多重基による数記法

数の特殊な用法では伝統的に十進法と並んで他の基数も用いるが、その基数は 12 の倍数であることが多い。例えば、時間を、日・時・分・秒・ミリ秒等で測るときは次が順に基数として用いられる。

$$\ldots,\quad 10,\quad 10,\quad 10,\quad 24,\quad 60,\quad 60,\quad 10,\quad 10,\quad 10,\quad \ldots$$

ここで、基数 10 が両側に無限に続き、その間に３つの基が、一日 24 時間、一時間 60 分、一分 60 秒に対応している。たとえば、

2040 日 13 時間 52 分 34 秒. 7362

を

$$2040_{10}(13)_{24}(52)_{60}(34)_{60}.7362_{10}$$

と表すことができる。ただし、添字は用いられている基数を表し、括弧の中は、24 や 60 を基数とする数記法における基礎数字を十進法で表記したものとなっている。イギリスでは、貨幣や重さや長さの単位についても、同様である。12 を基数にすることで 3 で割ることが簡単になる利点がある。しかし、この利点は、十進法を放棄することによる錯綜を帳消しにはできない。24 が時間表現の基数として普遍的に採用されている理由は、時間の割算を簡単にするためだけである。十進法化の努力の中で、一日を 96 の四半時間に分割するかわりに 100 の décicé に分割されたが普及しなかった。角度の分割には、四半円を 90 度ではなく 100 に分割することはある程度成功した。しかし、度への分割は、一日の時間への分割と単純な関係があるという利点があることを認識しなければならない、というのは、一時間は 15 度に対応するからである。

いくつかの基数を、それぞれ無限回使うような数記法が実際に使われたことは一度もないようである。そのような数記法は、基数の変化が周期的でなければ実際上定義できないが、周期的な場合は、この数記法は、それらの基数の積を基数とする単純な数記法と同等であると考えることができよう。

たとえば、基数が

$$\ldots, \quad 10, \quad 2, \quad 12, \quad 10, \quad 2, \quad 12, \quad 10, \quad 2, \quad 12, \quad \ldots$$

のように順に変る数記法は、240 を基数とする数記法と同等となる。ただし、小数点が、10 と 2 の間にあるのか、2 と 12 の間にあるのか、あるいは 12 と 10 の間にあるのかを確定しておかなければならないが。もしも、12 と 10 の間にあると決めておくとすると、たとえば、

$$119 = 41(11),$$

$$143 = 51(11),$$

となり、

$$41(11), \quad 51(11) \qquad (\text{base } 10, 2, 12)$$

のかわりに、

$$(119), \quad (143) \qquad (\text{base } 240)$$

などと書くことができる。

以上、無限の基数を持つ二つの特別な数記法を調べた。そのような数記法の最も一般的な定義は、最も一般的な 無理数を定義するのと同様に複雑である。従って、それらの数記法は一般に到達不能であると言うことができる。

5.5 階乗記法

階乗記法は、基数が 2 から順に増加するもので、0 と 1 の間の実数を表現するのに使われる。従って階乗数記法では、数は、

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2 \cdot 3} + \frac{a_3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{a_n}{(n+1)!} + \ldots$$

と表現される。ただし、$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ は、それぞれ添字以下である、すなわち、

$$\begin{array}{rl} a_1 \leq 1 & , \\ a_2 \leq 2 & , \\ \ldots\ldots & , \\ a_n \leq n & . \end{array}$$

もしも、ある桁から先で

$$a_n = n,$$

となっているときは、

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{(n+1)}{(n+2)!} + \ldots + \frac{n+k}{(n+k+1)!} + \ldots = \frac{1}{n!}$$

が成り立つ。実際、

$$\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!},$$

であることに注意すれば、左辺の部分和の項数を十分多くすれば、右辺との差はいくらでも小さくできるのである。

従って、上の数 x を

$$x = 0, a_1 a_2, \ldots, a_n \ldots,$$

と略記すると、もしも、a_{n-1} が $n-1$ ではないとき、

$$0, a_1 a_2, \ldots, a_{n-1} n (n+1)(n+2)(n+3) \ldots = 0, a_1 a_2, \ldots, (a_{n-1} + 1)$$

となる。従って、ある桁から先が $a_n = n$ であるならば、有理数となる。逆に、$a_n < n$ となる n が無数にあるとき、その数は無理数となる。

十進法では、有限小数で表されると同時に、有限個の桁以外は 9 であるような無限小数でも表現できるのは、十進分数、すなわち自然数を 10 のべきで割った分数、だけである。実際、

$$0.247 = 0.24699999 \cdots .$$

十進分数ではない有理数の十進小数表示は、単純な循環小数か混合した循環小数で、ただ一通りの方法でしか表わされない。

このことは、基数が 10 以外の単純数記法でも全く同様である。

階乗数記法の場合は、この規則は、すべての有理数について成り立つ。すなわち、どの有理数も、有限展開と、$a_n \neq n$ となる n が有限個の無限展開により二通りに表示される。このことは、最初の n 個の基数の積 $n!$ は、n が十分に大きくなると、予め与えられた有限個の数すべてで割り切れる、ということからわかる。

以上より、階乗数記法は、次の点で、以下の節で取りあげる 正規ユニタリ展開や連分数展開にはない利点がある。その利点とは、この記法により有理数と無理数とを簡単に識別できることであるーー有理数は、有限展開と無限展開の二通りの表示ができるのに対し、無理数は無限展開による表示しかできない。

それに対し、10 進法のような単純数記法では、一部の有理数だけが、有限と無限の二通りに表示することができ、他の有理数は無限循環表示として一通りに表示できるだけである。

ここで、どのような数が階乗数記法で循環するかを誰でも問いたくなるだろう。すぐわかることだが、こういった数は、e^{ω} の線型結合となる、ただし、ω は 1 の n 乗根を表わす。しかし、こういう数は特に興味深いというわけではない。これとは対照的に、自然対数の基 e は階乗記法では特別単純な表記を持つ、というのは、どの桁 a_n も 1 となるからである。もっとも、そうだからこそ、階乗数記法や、次節で取りあげる正規ユニタリ展開が着想されたに違いない。

階乗数記法では、小数点以下第 $n+1$ 位の数 a_n は $0, 1, \cdots, n$ のいずれかとなるので $n+1$ 個の値のいずれかをとる可能性がある。したがって、もしも、先に定義したような確率を定めるとき、a_n は、これらの値のいずれとなるかは同じ確率を持つことになる。

a_n が与えられた数 k と一致する確率は、$n < k$ のときゼロであり、$n \geq k$ のとき、$\dfrac{1}{n+1}$ である。級数

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k+h} + \ldots$$

は発散するので、整数 k が与えられたとき、$a_n = k$ となる n が無数にある確率は 1 となる。k, h がとても大きいとき、ほぼ

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k+h} = \int_k^{k+h} \frac{dx}{x} = \log\frac{k+h}{k}$$

となるので、$k + h = ek$ のとき、この和は 1 となる。

上のことから、k より小さい数が一つ与えられたとき、n が k と ek の間の数を動くとき、つまり、長さ $(e-1)k$ の区間を動くとき、平均的には、少なくとも一つの a_n はその数と一致する。この区間の数の中に、平均的には、1 から k までのどの数も現われなければばならないので、特に $(e-2)k$ は k と ek の間の $(e-1)k$ 個の自然数のどれかと同じになる[14]。

このことから次のことがわかる：二つの自然数 k, h を勝手に選ぶとき、h が k と比べて遥かに大きいとしても、最初の n 個の a_n の中に、それぞれが現われる頻度の比率は、n が限りなく大きくなるとき 1 に近づく。こうして、これまで試みたができなかったことーーどの数にも同じ確率を与えることが、階乗数記法により可能となると考えることができる。もっとも、それは漸近的な確率でしかないことはわきまえておく必要がある、すなわち、k, h が現れる頻度が等確率となるのは、k, h が大きい数になるにつれ、n をより大きくするときだけ正しい。従って、到達不能でない数が出現するのは n 自身が到達不能な数でない間だけである。

[15] どの整数 k の相対的な頻度も、より先の a_n を考えるにつれ、零に近づくが、零に近づく速度は次第に遅くなる。k が与えられたとき、a と ea の間にある k 以上の n の中では、平均して一個の a_n が k と一致するので、a と ae^b の間にある n については平均 b 個が k と一致する。

もしも

$$ae^b = c$$

[14] 訳註：$(e-2)k < k$ だから。

[15]訳注: 以上のことをもう少し詳しく説明しよう。

とおくと、

$$b = \log c - \log a$$

となる。

n は k 以上でなければならないので、a を k ととることにし、n が k と c の間を動くとき、a_n が k と一致する n の個数の平均は

$$b = \log c - \log k$$

となるので、$a_n = k$ となる n の個数の平均は

$$d = \frac{\log c - \log k}{c}$$

となる。この数 c が k と比べて極めて大きくなるとき、この値は、次で定義される k によらない数 d' とほとんど違わなくなる：

$$d' = \frac{\log c}{c}.$$

従って、どの数の密度も c が限りなく大きくなるとき零になるが、互いに同じ値になりつつ零に近づく。しかし、値 c を固定すると、k が c と比較したときに無視できなくなった時は、d' を定める式ではなく d を定める式を用いねばならず、k が c を超えたときは、密度は零となる。

[16]Sirling の公式によれば

$$n! = \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n(1+\varepsilon_n)},$$

ただし、ε_n は n が増加するとき n に収束する。従って、階乗数記法で最初の n 項による近似、あるいは、第 n 項のあとの桁を省くことによる誤差は、

$$\left(\frac{e}{n}\right)^n$$

の大きさである一方、十進法や a 進法では、

$$\frac{1}{10^n} \text{ または } \frac{1}{a^n}$$

である。従って 10 進法と比較すると、n が ea つまり 27 を超えるとき, 階乗記法の方が近似は良い。従って、階乗記法の方が他の単純記法より好ましいのは、非常に大きな精度を得たいときだけある。

[16]訳注: 最後に近似の度合を評価しよう。

5.6 正規逆数展開

階乗記法で数 e は 1 が無限個続いたので、次のように問いたくなる。すなわち、階乗記法における増大列 $1, 2, 3, \cdots$ のかわりに、別の増大列、あるいは、非減少列をとることで、0 と 1 の間にある無理数を逆数和として表示できないだろうか、すなわち、分子がすべて 1 であるような分数の和として表示できないであろうか、と問うことは自然であろう。この問は肯定的に答えることができ、実際、以下に説明するような、単純で正確な手続きで、与えられた数を逆数和に一意的に展開することができる。この級数を正規逆数展開と呼ぶ。

0 と 1 の間にある数 α が与えられたとき、α を a_1 進小数として表示したとき、小数点以下第一位が 1 となるような基 a_1 は一つだけではない。そのような基の中で最小のものは、次の 2 つの不等式で与えられる：

$$(a_1 - 1)\alpha \ < \ 1 \ \leq a_1\alpha. \tag{1}$$

いうまでもないことだが、α が無理数のときは等号は成立しない。

$$a_1\alpha - 1 \ = \ r_1 \tag{2}$$

とおくと、(1) より

$$0 \ < \ r_1 \ < \ \alpha \tag{3}$$

となる。次に、α についてやったことを r_1 についても行う。つまり、

$$(a_2 - 1)r_1 < 1 < a_2 r_1 \tag{4}$$

を満す整数 a_2 を探す。

不等式 (3) により、

$$a_2 \geq a_1 \tag{5}$$

$$a_2 r_1 - 1 = r_2 < r_1 \tag{6}$$

が成り立つ。

従って、r_1 についてやったことを r_2 について行うことができ、$r_1, r_2, \cdots$ が α と同様に無理数であるかぎり同様に限りなく続けられる。こうして、減少する数列

$$\alpha > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots > r_n > \cdots$$

が得られ、これに対応して自然数の非減少列

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

が得られる。

このとき、数 α は、標準逆数展開される：

$$\alpha = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_1a_2a_3\ldots a_n} + \ldots.$$

もしもある桁から先の a_n が互いに等しくなるとき、

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{a_n^3} + \ldots = \frac{1}{a_n - 1}. \tag{11}$$

となる。

このことから、n 桁目から先は、a_n が互いに一致すると仮定することは、a_{n-1} が a_n より小さいということになり、従って、大きくても $a_n - 1$ となる。一方、このとき、

$$\frac{1}{a_1a_2\ldots a_{n-1}}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^k} + \ldots\right) = \frac{1}{a_1a_2\ldots a_{n-1}(a_n - 1)},$$

なので、α の値は、次の有限展開と等しくなる：

$$\alpha = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \ldots + \frac{1}{a_1a_2\ldots a_{n-1}} + \frac{1}{a_1a_2\ldots a_{n-1}(a_n - 1)}$$

ただし、$a_n - 1$ は a_{n-1} 以上である。以上により、数 α は有理数であることがわかった。このとき、(1) の二番目の不等号は、ある段階で等号となる。階乗記法のときと同じように、有理数は、有限展開と無限展開の 2 通りに表示できるのに対し、無理数は逆数和展開として唯一つの方法で表示できる。唯一性は、少数展開の最初の位が 1 となるよう基の中で最大のものを a_1 とし、以下、同様に選ぶことによる。

逆に、無限数列が与えられ、非減少で、しかも、ある番号から先は同じ数である、ということはなく、従って、a_n は n とともに限りなく増大していくものとする。このとき、

$$\alpha = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_1a_2\ldots a_n} + \ldots \tag{9}$$

とおくと、数列

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \ldots \le a_n \le \ldots \tag{10}$$

は、逆数和展開が (10) であるような無理数をただ一つ定める。実際、(9) と (10) から、二つの不等式 (1)、あるいは同じことだが、(2) と (3) を得る。実際、(9) より

$$r_1 = a_1\alpha - 1 = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_2a_3a_4} + \ldots \tag{11}$$

となるが、不等式 (10) から、(11) の各項は、(9) の同じ場所の項以下であるが、各項がすべて一致するのは、(10) の不等号がすべて等号となる場合であるが、これは、a_n が n とともに限りなく増大する、という仮定に反する。

逆数和展開は、ある意味で、階乗展開とは逆の定義となっている。実際、階乗展開では、分母の因子列が自然数の自然な増大列として与えられているのに対し $n-1$ 位の分子は n 個の異なる値をとりえる。逆に、逆数和展開では、すべての分子は 1 であり、分母をなす因子を適切に選ぶことにより、任意の数 α を表示できる。

最初の $n-1$ 個の因子 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ がわかっているとき、次の桁 a_n の確率はどのくらいかを調べることは興味深い。

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ が与えられたとき、

$$\alpha = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \ldots + \frac{1}{a_1a_2\ldots a_{n-1}} + r_n$$

となり、余剰項 r_n は不等式

$$0 < r_n < \frac{1}{a_1a_2\ldots a_{n-1}}\frac{1}{a_{n-1}-1}$$

を満す。もしも

$$\frac{1}{k} < r_na_1a_2\ldots a_{n-1} < \frac{1}{k-1}$$

ならば、a_n は k と一致する。従って a_n がとりえる最小の数は、a_{n-1} である。$k = a_{n-1} + h$ とおくと、h は 0 から ∞ まで動きえて、h が与えられた数をと

る確率は、r_n についての 2 つの区間 (2) と (1) との比となる。従って、共通項である $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ の昔の逆数を約すると、確率は、

$$\frac{1}{a_{n-1}+h-1} - \frac{1}{a_{n-1}+h} \text{ を } \frac{1}{a_{n-1}-1}$$

で割った商となり、$a_{n-1}-1=t$ とおくと、これは

$$p_h = \frac{t}{(t+h)(t+h+1)}$$

となる。

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_h + \ldots = 1,$$

となることが容易に確かめられ、

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}+h \\ a_{n-1} &= 1+t \end{aligned}$$

とおくと、

$$\mu = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1+t+h}{1+t}$$

となる。

ここで、$\log \mu$ の平均値を計算してみよう。この平均値 M は、定義により、、その各値 $\log \mu$ を、その確率を乗じて加えたもの、すなわち、

$$M = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t}{(t+h)(t+h+1)} \log \frac{1+t+h}{1+t}.$$

となり、結局

$$M = \frac{t}{t+1} \log \frac{t+2}{t+1} + \frac{t}{t+2} \log \frac{t+3}{t+2} + \ldots + \frac{t}{t+h} \log \frac{t+h+1}{t+h} + \ldots$$

となる。しかし、t が十分に大きいときは

$$\log \frac{t+h+1}{t+h} = \frac{1}{t+h} - \ldots$$

となり、書かなかった項は無視できる。従って

$$M = t\left[\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(t+h)^2} + \ldots\right] = 1$$

となる、というのは、t が十分に大きいという仮定の下では以下が成り立っているとしてよいからである。

$$\sum_{t}^{\infty} \frac{1}{(t+h)^2} = \int_0^{\infty} \frac{dh}{(t+h)^2} = \frac{1}{t}.$$

$\log\mu$ の算術平均 M は 1 なので、μ の幾何平均 e^M は e となる。a_{n-1} が与えられたとき、a_n の幾何平均は ea_{n-1} となり、従って、n が十分に大きいときは、a_n の幾何平均は e^n に比例して増大する。

もちろん、a_n が e^n よりもっと早く増大するものや、もっとゆっくり増大するような α を定義することはできる。実際、天下り的に、α を、a_n としてが

$$a_n > e^{e^n}$$

を満す最小の数をとったり、

$$a_n < \log\log n$$

を満す最大の数をとることで、そういう数を構成できる、ただし、後者では右辺が 2 より小さいときは $a_n = 2$ とする。後者では、次第に多くの続く a_n が同じ値を取るようになるが、a_n は n とともに際限なく大きくなることには違いなく、それゆれ α は無理数となるのである。

無理数を有理数で近似するという観点から、階乗記法と逆数和展開とを比較することは興味深いが、それは、この本の主題から逸れるので、これ以上追求しないことにする。

5.7 連分数

連分数の起源は古く、算術で与えられた二数の最大公約数をもとめる方法にやりかたにまで逆のぼることができる。この方法は、大きい方を小さい方で割り、その余りで小さい方を割り、次に、この割算の余りで最初の余りを割

る、ということを、最後に余りが零となるまで次々と繰りかえす。最後の除数は、1 となることもあるが、それが最大公約数となる。

比が無理数の二数に、同じ操作を行う。ただし、各ステップの割り算は、商が整数でなくなる直前まで行う。そうすると、一連の操作は限りなく続けることができ、連分数が得られる。各操作での商は不完全商と呼ばれる。上で述べたように、与えらた数の大きい方 β を小サイ方 α で割ることから始まる。こうしてえられる連分数は、β の α による商を表わす。

実際、

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha a_1 + r_1, \\ \alpha &= r_1 a_2 + r_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots &\quad , \end{aligned}$$

とおくと、

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{a\alpha_1 + r_1} = \frac{1}{a_1 + \dfrac{r_1}{\alpha}},$$

となり、次に、

$$\frac{r_1}{\alpha} = \frac{r_1}{r_1\alpha_2 + r_1} = \frac{1}{a_2 + \dfrac{r_2}{r_1}},$$

となり

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{r_2}{r_1}}}.$$

これを限りなく続けると、次のように、しばしば圧縮して表示される連分数が得られる：

$$\frac{\alpha}{\beta} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots), \tag{2}$$

ただし、a_n はすべて正の整数である。

以上のように、連分数のアルゴリズムを、$0, 1$ の間のあるすべての数 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を (2) の形式で表示する、数記法とみなすことができる。もちろん、$\beta = 1$ とすることができ、その場合には α は 0 と 1 の間にある数とする。

数 α が有理数のとき、連分数展開は有限で終わる。もしも a_n が 1 より大きいとき、

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1)$$

たなりたつ一方、$a_n = 1$ のときは、

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1) = (a_1, a_2, \ldots, a_n - 1+)$$

が成り立ち、すべての有理数は、有限連分数により二通りの方法で表すことができる。それに対し、無理数 α の無限連分数表示は一意的となる。

連分数の簡約化とは、(1) の列を最初の n 項だけとったものから得られる既約分数のことを言う。そこで

$$\frac{P_n}{Q_n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{3}$$

とおくと、次の公式が容易に示される：

$$\begin{cases} P_{n+1} = a_n P_n + P_{n-1}, \\ Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_{n-1}; \end{cases} \tag{4}$$

$$P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1} = (-1)^n. \tag{5}$$

これにより、式 (4) で連分数の簡約化が定義されることがわかる。この簡約化の数列は、連分数より小さくなることと大きくなることを交互に繰り返して連分数に近づく。

なお、(5) により次がなりたつ：

$$\alpha = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \frac{1}{Q_3 Q_4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n+1}} + \ldots.$$

最初の不完全商 a_1 が与えられた数 k となる確率は簡単に計算でき、

$$p_k = \frac{1}{k(k+1)} \tag{6}$$

となる。

しかし、a_2 についての同じ問題は解決がもっと難しくなり、一般の a_n については、もっと難しくなる。実際、a_n が与えられた数 k となる確率は、k だけでなく不完全商 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ の値にも依存する。もっと正確には、最後の 2 つの簡約化の値、すなわち、4 つの値 $P_{n-2}, Q_{n-2}, P_{n-1}, Q_{n-1}$ に依存する。しかしながら、これらの値がどうであれ、a_n が k と等しくなる確率は、

$$p_k = \frac{a}{k(k+1)} \tag{7}$$

となることがわかる。ただし、a は 1 と 2 の間の数であるが[17]、上で言及した 4 つの数に依存する。

さらに、$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ のそれぞれが与えられた数 k となる確率の平均を計算することもできる。この合成された確率 p_k も明らかに (7) 式で与えられ、a は色々な値をとりえるが、いつも 1 と 2 の間にある。

以上から容易にわかるように、不完全商の一つ a_n が k より大きくなる確率 q_k の値は

$$q_k = \frac{a}{k}$$

で与えられる。

q_k の級数は発散することから、以下のことが結論できる。もしも、n 番目の不完全商 a_n が n 以上であることを好ましい事象であると考えると、その事象は無限回起きる、すなわち、その事象が有限回しか起きない確率はゼロである。

この結果から引きだすことができる興味深い諸結果については、ここでは追究しせず、先に引用した本に委ねることにしたい。

前節で逆数和記法により、0 と 1 の間にあるすべての無理数 α に対し、非減少な無限自然数列が対応したのに対し、連分数論を使うと α に対し、任意の無限自然数列が対応した。後者の無限列の方が前者よりも一般であると思うかもしれないが、一方を他方に変換することは簡単にできる。もしも a_n が非減少数列の一般項とするとき、

$$b_n = a_{n+1} + 1 - a_n$$

[17] ここでは得られた結果を少し単純化している。この単純化は、それらの結果から導びく結果には影響しない。もっと正確な記述は、私の「集合論の基礎」の註 1 をみていただきたい。

とおけば、b_n は任意の無限自然数列となる。逆に、a_1 を 2 以上の任意の数を選び

$$a_{n+1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_n - n + a_1$$

と表示できる。

このことからわかるように、非減少無限自然数列を与えることと、任意の無限自然数列を与えることとの間には、一般性という点では、違いはない。しかし、これらの二種類の数列の種々の与え方において、各位が与えられた数となる確率は、一般には異なる。

5.8 交代級数

よく知られた公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \tag{1}$$

が示唆する一般的数記法について、最後に一言だけ触れておきたい。

この公式の右辺は交代級数でその和は交互に正と負となり、絶対収束はしない。というのは、各項の絶対値のなす級数は発散するからである。

符号 $+$ と $-$ が規則的に交代することなく勝手な順序で続いても良いとすると、各項の絶対値が (1) の各項の絶対値と同じ級数でも 0 と 1 の間の任意の数に収束させることができることは明らかである。たとえば、級数を 0.5 に収束させたいのであれば、1 のあとに、引く項を

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} < 0.5$$

となるまで書く。次は一つの項で

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > 0.5$$

を得、また一つの項で

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} < 0.5$$

となる。

同様にして

$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}>0.5,$$

$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}<0.5,$$

のように、限りなく近似を続けることができる。項はゼロに近づくので、項数が増えるに従って近似は良くなる。

いうまでもなく、出発点となる級数としては

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

をとることができる。より一般的には、各項の絶対値のなす級数が発散し、項がゼロに近づく級数があれば、それを出発点にできる。

もしも出発点となる級数を選んだならば、$0,1$ の間にある任意の数 α ($0,1$ の間にあることは本質的ではないが) に対し、$+$ と $-$ の無限の列が定まるが、その並び方は一般には不規則である。もしもこの順序が著しく不規則なときは、これらの符号をたくさん計算するのは長い時間がかかる。逆に、符号の順序が単純な規則に従っていて周期的なとき、しばしば級数を計算することができる。たとえば、

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2.$$

最後に、どの数 α でも、次のような形に展開することができることを指摘しておこう：

$$\alpha=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\ldots.$$

ここで、a_1 は 1 以上の数、a_2, a_3 は自然数の増大列で、$a_1, a_2, a_3, \cdots$ は次を満す最小の数として順に選ばれる：

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1} &> \alpha,\\ \frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2} &< \alpha,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \quad > \quad \alpha,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

a_2 は 2 以上であり、a_{n+1} は a_n^2 以上であることがわかり、a_n はとても速く増大し級数

$$\alpha = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_n} + \cdots$$

は急速に収束することが保証される。

Chapter 6

数論的諸定義

6.1 原始的な数論的定義

これまでの各章でいろいろな数記法を調べてきたが、それらは最も単純で普通なものの中から選んだものである。もしも数記法の定義を広義にとらえ、自然数の限りない数列で何らかの性質を満すものを使って、到達不能な数を定義することを可能とするプロセスを数記法とみなすならば、他の数記法をいろいろ構想することは容易である[1]。

他のところで、0 と 1 の間にある数 α をランダムに選びたいならば、それを定義する一連の数を決められた条件に従って籤を引いて決めれば良いということを説明した。この条件は、十進法や 2 進法の場合はとても単純だが、連分数の場合はもっと複雑なものであった。

しかし、このような籤による定義は全く理念的なものであり、実際には実行できない。とはいえ、それを用いることで、数 α が与えられた条件を満す確率ーーつまり、ちゃんと定義された集合に属する確率ーーを求める問題で面白いものを考え解くことは可能である。この場合は、籤引きを使う定義に対応するものが、数 α に対応する数列を明確な規則に従った逐次的な計算である、ただし、数 α が何らかの解析的条件により明確に定義されているという前提があってのことだが。この方法で、e,π,$\sqrt{2}$ などのいくつかの普通の数の十進数展開の最小の何項かが計算されてきているのである。だいぶあとの方になるが、この計算について取りあげるとともに、その計算が十分でな

[1]数記法を自然数を表現するのに利用することはやめておくことにする。無理数の場合の方がもっと興味深く見えるから。

いことについて触れる。

数記法を一つ選び、次に、この記法で α に対応する数列を与える方法を一つ与えれば、数 α を定義することができる。これを数 α の算術的定義と呼ぶ。まず、原始的な算術的定義について、最も単純なものをいくつか例示して説明したい。ただし、定義が算術的であるというのは到達不能数 α についての他の情報を使わないことを言う。

たとえば、十進記法において、小数点以下に、自然数を普通の順番で書くことができる。

$$\alpha = 0,1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ \ldots$$

あるいは、偶数だけを書くこともできる。

$$\beta = 0,\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12\ 14\ 16\ 18\ 20\ 22\ 24\ 26\ 28\ 30\ \ldots$$

あるいは、素数だけを書くことさえできる。

$$\gamma = 0,1\ 2\ 3\ 5\ 7\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 29\ 31\ 37\ \ldots.$$

すぐわかるように、α, β, γ はいずれも正規数であることがわかる、つまり、どの数字の頻度も同じで $\dfrac{1}{10}$ となる。

連分数記法では、不完全商の列を簡単な規則で定義することができる。たとえば

$$a_n = 10 \text{ あるいは } a_n = n^2 + 1.$$

階乗記法では、a_n は n 未満という制約があるが、たとえば、n が偶数か奇数かに応じて $\frac{n}{2}, \frac{n-1}{2}$ と定義することができる。正規逆数記法では a_n は広義増大数列でなければならないが、上と同じように n が偶数のとき $a_n = \frac{n}{2}$、奇数のとき $a_n = \frac{n-1}{2}$ と置くと、a_n は減少することがないので数 α が定まる。

このような例をこれ以上増やすことは無駄であろう、というのは上のやり方はいくらでも変形できるからである。しかし、本当に面白い例を与えることはとても難しい。つまり、上のような方法で定義した数について定義からすぐわかるのではない性質を証明することは難しいのである。そのような性質はわずかしか知られていない。たとえば、十進数については周期的なものが有理数に対応するということや、循環的な連分数が整係数の二次方程式の解を表すことなどが、その例である。一方、e や π のような数の特殊な展開はわかっている。たとえば、$e-2$ の階乗記法による表現や、前章の最後で

言及した $\frac{\pi}{4}$ の表現などがその例である。このような展開は、解析的性質により単純に定義された数と、同じように単純に定義された数項級数との間の関係を教えてくれるもので最も重要な類のものである。というのは、解析学で定義される数と数論的に原初的に定義される数[2] の間の関係を知る問題群の要塞ーーほとんど到達不能な要塞への入口を、これらの展開が形成するからである。以下、われわれは派生的な数論的定義を調べることにする。この定義では、すでに知られている到達不能数を使って理論的には計算可能な、無限数列を出発点とする。

6.2 派生的数論的定義

例として円周率 π から始めよう。この数は、最も長い桁数まで十進小数展開が計算されている到達不能数の中の一つである[3]。だれでも、十進展開の最初の部分を知っている

(1) $$\pi = 3,1415926535\ldots.$$

この十進展開がわかったとして、その展開から、色々な方法で無限数列を定義することができる。たとえば、以下がその例である。

(1) $$1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, \ldots,$$

(2) $$1, 14, 141, 1415, 14159, 141592, \ldots,$$

(3) $$1, 41, 592, 6535, \ldots,$$

(4) $$14, 15, 92, 65, 35, \ldots,$$

これらの数列から種々の方法で新しい超越数を多々作ることができる。これらの数は、数 π をもとに作られるので、派生的な数論的定義を持つと言う。

利用できる構成法は余りに多くて列挙することは論外である。しかし、定義も性質も自然で簡単な数論的関数のいくつかを、例として詳しく調べるこ

[2] すでにオイラーが見つけていたものだが、単純な連分数展開を持つ数で、その値が e または π の関数として表示できるものも挙げることができる。

[3] この数の十進展開は、800 桁に達していたが現代の計算機を使うことですでに 2000 桁を超えており、急速に増大していくであろう。

とは面白そうである。当面、十進法しか使わない方法に限ることにする。さらに、定義される対応が全単射であると仮定する、すなわち、すべての十進法 α に唯一の数 β が対応し、逆に数 β に唯一の数 α が対応すると仮定する。もっとも、有限十進数は、0 が無限に続くものと 9 が無限に続くものとの二通りの仕方で表されるという事情により、全単射性の仮定への例外となる場合が多い。

そこで、0 から 9 までの 10 個の数字の置換を定義することにしよう。置換は、次のように、10 個の数字を二列に異なる順序で書くことで正確に表すことができる。たとえば

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 1 & 9 & 8 & 0 \end{matrix}$$

のように書くとき、各数字は真下にある数字に対応する。この例では、数字 8 には自分自身が対応する一方、他の数字は巡回置換をなし、

$$(8)(025461379)$$

のような表記も使える。同じように、この表記による

$$(237)(1489)(056)$$

は、次の置換を定義する：

$$\begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 & 0 & 2 & 9 & 1 \end{cases}$$

このような置換の数は

$$10! = 3628800$$

個ある。これだけの個数の無限小数（自分自身を含めて）を、$\pi - 3$ のような数に対応させることができる。たとえば置換 (P) により

$$0.1415926535\cdots$$

に対し

$$0.4846130676\cdots$$

を対応させることができる。

ところで、これらの 3628800 個の数は、和が 1 となる対に組わけできることがすぐわかる。しかし、この単純な関係以外にも、これらの 3628800 個の数を結ぶ関係は少なくない。

無限小数は出現する数字が 0 か 1 のみであるとき単位的ということにしよう。無限小数 α から、１０個の単位的小数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_8, a_9$ を次の単純な規則で定義することができる。すなわち、α の中に出現する n を 1 で置き換え、他は 0 に置き換えた小数を a_n とする。

たとえば、

$$(A) \qquad \pi - 3 = 0.1415926535\cdots$$

については

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.1010000000\cdots \\ a_5 &= 0.0001000101\cdots \end{aligned}$$

となる。どの α についても

$$(1) \qquad a_0 + a_1 + \cdots + a_8 + a_9 = 0.11111111\cdots = \frac{1}{9}$$

となる。逆に (1) を満たす 10 個の単位的十進小数があれば、無限十進小数 α が確定する。ただし、ただ一つ例外がある。それは、

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_8 = a_9 = \frac{1}{90} = 0.01111111\cdots$$

や、同じ等式が a_n に 10 の冪をかけた数の小数部分について成立する場合だけである。実際、(1) を満たす 10 個の数 $a_0, a_1, \cdots, a_9$ を足すために縦に並べて書いたとき、ある列に 1 が２つ以上あればその桁にある 10 個の数はすべて 1 でなければならない。どの桁も同様である場合が (2) の場合だが、そうでなければ、ある桁（第 n 桁としよう）のところに 0 が出現する。すると、n 桁のところで繰り上がりがないので、それより左の桁では 1 が丁度一回だけ現れなければいけない。この桁に 1 が現れないとすると、それより右にある桁は 1 しか出現してはいけないが、これは a_n に 10 の適当な冪を掛けた小数部分が 1/90 の無限小数展開となっている場合以外は起こりえない。

条件 (1) を満たす 10 個の単位的十進数があり、前節のような例外的なものものではないとき、この 10 個の十進数を使って、置換 (P) に対し

$$\alpha = 5a_0 + 4a_1 + 3a_2 + 7a_3 + 8a_4 + 6a_5 + 2a_7 + 9a_3 + a_9$$

という十進数を対応させせることができるが、同様に他の置換にも十進数を対応させせることができる．α のような 3 628 800 個の数の間には、3 628 791 個

の線形関係があるが、この中の 1 814 400 個の関係はたいして面白いものではなく、すでに説明したように、これだけの個数の対について和が 1 となるという線形関係がある。他の線形関係を得ることは難しいことではないが、ここでは、それを書き下すための計算は省く。

しかし、簡単かつシステマティックな方法で a_n から 10 個の数 α を定義することができることについて触れておこう。たとえば、

$$\begin{aligned} x_0 &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 9a_9 \\ x_k &= x_0 + k(a_0 - a_k) \quad (k = 1, 2, \cdots, 9). \end{aligned}$$ [4]

逆に、x_k を使って a_k を計算できるので、a_k の間の関係 (1) は、x_k の間の線形関係を与える。一方、(3) のような関係で定義される α (あるいは x) はすべて、x_k の線形関数として表すことが容易にできる。

ところで、一対一の写像とはならないが、x_k を使って別の数を同様に表すことができる。たとえば、$4, 5, 7$ をすべて 0 に置き換えて得られるような数である。この数 β から元の数を再構成はできないのは明らかである。というのは、β に出現する一つの 0 は、$0, 4, 5, 7$ のいずれにも対応し得るからである。しかし、β は (3) と同じように a_i の線形結合として表現できる。9 個の β をうまく選べば、x_k をそれの線形関数で表すことができる。選びかたは、(3) と同様の関係式の係数と、関係 (1) の係数から作られる行列の行列式が 0 ではないようにすればよい。

最後に、与えられた (A) のような数から 2 つの数を定義し、その 2 数から元の数を再構成できるような方法について触れておこう。たとえば、奇数番目の数をならべた数と偶数番目の数をならべた数の二数をとる方法を考えてみよう。こうすると数 (A) に 2 つの数 y と z が次の式で定義される.

$$\begin{cases} y = & 0.11963\cdots, \\ z = & 0.45255\cdots \end{cases} .$$

こうして定義される (A) から (B) への対応は一意的に定まり連続であるが、(A) が有限十進小数のところは例外となる。たとえば、

$$A = 0.325 = 0.3249999\cdots$$

のとき、

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.35, \\ z_1 &= 0.2 \end{aligned}$$

と

$$
\begin{aligned}
y_2 &= 0.34999\cdots = 0.35, \\
z_2 &= 0.29999\cdots = 0.3
\end{aligned}
$$

の２組の数に対応するが、この例を通して、有限十進小数が y または z の不連続点となることが容易に確かめられる。

正方形の点をすべての通る連続曲線であるペアノ曲線を二進数で定義するときは、これらの不連続点について簡明な結果が得られる。

二次的な算術的定義は、以上の簡単な示唆にとどめておきたい。色々な方法で変種を数多く作れるのだが、少し考えるとわかるように、そのような変種がどれほど豊かにあるとしても、有限を超えることはなく、ましてや可算を超えることはありえない。従って到達不能数の濃度である連続体の濃度より遙か手前にとどまっているままである。こうして、第三章で説明した観点に新たに達する。その観点は、連続体は実質的には到達不能数で構成されていて、確率論の方法によってしかこれらの数を研究できない、というものであった。この点を念頭に入れ、連続体のある種の変換について次に調べることにする。その結果、これらの変換の振る舞いを、ユークリッド的視点で分類することが出来るようになる。

6.3　ユークリッド的変換と擬ユークリッド的変換

連続体の変換で特に重要な最初のクラスは、ユークリッド的変換と擬ユークリッド的変換である。ユークリッド的変換はユークリッド的な性質を保つものだが、擬ユークリッド的変換は無限小の範囲でのみ保つものである。

文字通りのユークリッド変換は合同変換と相似変換である。合同変換は定義により長さと角度を変えないもので、相似変換はすべての方向に同じ比率で拡大するもので、長さの比は不変であり諸領域の相対確率は変わらない。

擬ユークリッド的変換を定義するものは、一次元の場合は微分可能な関数であれば何でもよく、二次元以上の場合は、ヤコビ行列式がゼロではない連続関数であれば良い。実際、このような変換は微分については線型となり、局所的には確率は定数倍となる。

しかし、こういったことは良く知られたことなのでこれだけにしておきたいが、次のことは指摘させることがあまりない。前節で定義した数論的変換は、線分と正方形のような違う次元の間の幾何学的要素間に対応を定める

が、その際、ユークリッド的視点からは同等な要素には、同確率のものに対応する。見方によれば、これらの特異的変換はユークリッド的と呼んでもおかしくない。そこで、これらを、最初の例を与えたペアノにちなんで、ペアノ・ユークリッド的と呼ぶことを提案したい。

実際、次のことは明らかである。もしも、十進数展開の最初の $2n$ 個の数字が

$$z = 0.a_1a_2\ldots a_{2n}\ldots,$$

であるような実数の全体は長さ $\dfrac{1}{20^{2n}}$ の区間を成す一方、対応する 2 つの実数

$$\begin{aligned} x &= 0.a_1a_3\ldots a_{2n-1}\ldots, \\ y &= 0.a_2a_4\ldots a_{2n}\ldots, \end{aligned}$$

は、それぞれ長さが $\dfrac{1}{10^n}$ の区間を成し、x, y を座標とする点は面積が $\dfrac{1}{10^{2n}}$ の正方形の内部を構成する。

上の偶数 $2n$ が奇数 $2n+1$ の場合も同様の計算が成り立つ。

以上より次のように結論できる。z が区間 $[0,1]$ の内部に属する確率は、この区間に対応する領域、すなわち、一辺の長さが 1 の正方形に点 (x,y) が属する確率と同じである。以上のことは、1 次元の長さと 2 次元の面積とを量る共通の尺度がないユークリッド的な概念体系からはかなりかけ離れている。しかし、ユークリッドは、二つの長さの比と二つの面積の比を比較し、それが同じであることを確かめることを禁じてはいない。この意味で、ペアノ・ユークリッド的な同等性という言葉を使うことができる。

言うまでもなく、以上のことは 3 次元や n 次元にも容易に拡張できる。

こういう見方もできる。一辺の長さが 1 の正方形 $OABC$ の点はいずれも、O を始点とし、長さ 1 の線分 OA と OC 上の任意の点 M, N を終点とするベクトル OM と ON の和として表される。したがって、二次元の空間は、2 つの 1 次元空間のベクトル和として得られると言うことができる。この事情は測度ゼロの集合に拡張できるが、そうすると、その集合の次元は 1 より小さいとみなせることがわかる。

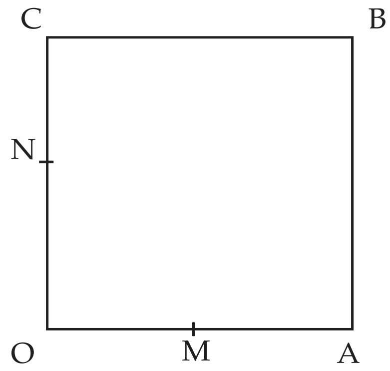

Fig. 2.

6.4 下ユークリッド的変換

0 と 1 しか含まない二進小数で表示された数 α を考えよう。

(1) $$\alpha = 0.1100100111100\ldots.$$

小数点以下の数字を $0, 1$ から当確率でランダムにあらゆる仕方で選ぶと、基本区間 $[0, 1]$ のすべての点が得られることは明らかである。

しかし、(1) を十進小数とみなすと別の数が定義される。これを β と呼び、α に対応させることにする。もしも

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} \cdots,$$

ならば、

$$\beta = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{10^9} + \frac{1}{10^{10}} \cdots,$$

であり、10 のべきをなす数列は 2 のべきをなす数列と同じで、自然数の勝手な増加列でありえる。

数 β は測度ゼロの集合 E に属することがわかる。しかし、0 と 1 の間のすべての点を含む 1 次元集合を得るためには、E と同じ 9 個の集合のベクトル和をとらなければならないので、E の次元が $\dfrac{1}{9}$ であることがわかる。実際、E と同じ集合を 8 個を加えた和は、数字 $0, 1, 2, \cdots, 8$ のみからなり 9 を含ま

ない無限十進小数となり、その測度はゼロである。しかし、β のような数を 9 個加えることにより、任意の十進無限小数、すなわち $0, 1$ に含まれるすべての点を無数の方法で得ることができる。

測度ゼロの集合の希薄性についての一般論は、この種の集合の性質が多様なため一般論はかなり複雑になるので、ここでは展開しない[5]。

ここでは、次元ゼロの集合が簡単に定義できることだけ確認するのにとどめておきたい。その集合は、同じ集合をどれだけ多くベクトル和をとっても次元 1 になることはないことから次元がゼロということがわかるのである。それには、無限十進小数

$$\alpha = 0.463107943\ldots$$

に対し、第 10^n 位の数字が α の第 n 位の数字で、他はゼロであるような無限十進小数 γ を対応させればよい。すなわち

$$\gamma = \frac{4}{10^{10}} + \frac{6}{10^{100}} + \frac{3}{10^{1000}} + \frac{1}{10^{10000}} + \frac{7}{10^{100000}} + \cdots.$$

明らかに、γ のような数の有限和 A は、ある桁から先はゼロが他の数字より頻繁に現れるようになるので、A の全体は測度ゼロとなる。このような測度ゼロの集合は、ゼロ希薄性をもつと言ってよいだろう。しかし、ゼロ希薄性の集合を無数のカテゴリーに分割せざるを得ないことになるので、上の言い方は余り正確ではい。しかも、増大度についてのデュボワレーモンの定理により、上のような分割には終わるところがないのである。

ユークリッド幾何学は 1 次元、2 次元あるいは 3 次元しか考えないから、1 次元の集合から、分数次元あるいはゼロ次元の集合をもたらす変換は、劣ユークリッド的変換と呼んでも良いだろう。

なお次の点に注意しておこう。二次元の空間において、座標 x, y がいずれも、式 (2) で定義された数 (β) のなす集合に含まれるような集合 E を考えると、この集合 E の 9 個のベクトル和は正方形全体、すなわち二次元の集合となるので、E の次元は $\dfrac{2}{9}$ であるとい言うことができる。このようにして、同じ分数次元をもつ集合を、一次元の中でも、二次元あるいは 3 次元の空間の中でも定義することができるのである。

[5] この理論の入り口は私の「集合論」で解説している。しかし、問題は十分には展開されておらず更なる研究が必要である。

Chapter 7

濃度の概念

7.1 カントールによる濃度

濃度の一般的定義は、カントールにより構築された一般論の主要部分の一つである。この定義によれば、二つの集合は、それらの要素の間に一対一の対応があるとき同じ濃度をもつという。

最も低い濃度は可算集合の濃度である。対角線論法を適用することで次第に大きくなる濃度の系列が定義でき、カントールは超限数とアレフ数の理論で同様に次第に大きくなる濃度の系列を定義した。しかし、この二つの定義の仕方は比較することが容易ではない。われわれは、曖昧さが少ない最初の系列のみを取り上げることにする。

よく知られていることだが、対角線論法は、c である集合の一般要素を表すとき、c の各値に 0 か 1 を対応させる関数 $f(c)$ の全体のなす集合の濃度は c が属する集合の濃度より大きくなることを示す方法である。実際に、もしも、関数 $f(x)$ の集合の濃度と c の集合の濃度が同じであるとすると、各 c に対し、関数 $f(x)$ の集合の要素であるただ一つの関数が対応する。それを $f_c(x)$ と書くことにする。このとき、条件

$$\varphi(c) \neq f_c(c)$$

により関数 $\varphi(x)$ を定義すると、この関数 $\varphi(x)$ は、$f_c(x)$ のいずれとも異なる関数である。従って、$f_c(x)$ の全体は、仮定に反して、関数 $f(c)$ 全体の集合とはならないことになる。

カントールのこの方法を可算濃度に適用すると、連続体の濃度が得られ、

次に連続な一変数関数全体の濃度、という具合に、以下同様に大きな濃度が得られる。

こうしてみると濃度の概念はいかに豊かなものかがわかる。これは抽象的な集合の最も重要な性質であると言うことができるできる。しかし、これまで考察してきた（直線上の点や平面上の点などの）幾何学的集合のような具体的集合については必ずしもそういうわけではない。

実際、前章で考察したゼロ測度の集合はいずれも連続濃度をもっているし、任意個数の連続体の直積だけでなく可算個数の連続体の直積も連続濃度であることは我々の知るところである。しかし、これらの集合は、濃度の視点では同等であるが、ユークリッド的な視点からすると、互いに極めて異なる性質をもっている。この点において、ユークリッド的な視点とカントール的視点の間に深く探求するに値する相克がある。

7.2　可算濃度

可算集合において全体が一部分と同じ濃度を持つ、という目立ったパラドックスが確認され明らかにされたのはかなり昔のことである。このパラドックスの例となるのは、自然数の集合と、偶数の集合、平方数の集合、あるいは、10 のべきの集合、との関係である。これらの集合は、要素の系列を無際限に書いていくとするとき、次第に希薄になっていくように見える。しかし、これらの系列は無際限に伸びていくがゆえに濃度は同じであることは明らかである。

到達不能数の概念を援用して、このパラドックスに対する最初の説明を試みることができる。状況を単純化し、到達不能数の境界が正確にわかっていて、その境界の数 A 以上は到達不能数であるものとし、さらに、この境界 A 以下の数しか考えないものとしよう。そうすると、明らかに、A 以下の偶数の個数は $\dfrac{A}{2}$ であり、A 以下の平方数の数は $\sqrt{A}$ 程度であり、A 以下の 10 のべきの個数は $\log A$ 程度である。

しかし、実のところこの仮定は勝手すぎる。実際、たとえば百万個もの数字を用いて表現されるような、とても大きな数の中のあるものは、他の、同様の数字を必要とする数よりも簡単に到達できることは明らかである。実際、17^{900} と書くのは、互いに関連のない 1000 個の数字を書くよりは遙かに素早くできる。この批判はあるが、可算のパラドックスを到達不能数の概念で明らかにすることは不可能ではないように思われる。しかし、確率の概念

に頼る方がより簡明であると私には思われる。というのは、これまでに考察してきたように、可算集合の個々の要素の確率の定義は、決定的に、到達不能数の概念に依存しているからである。しかしここでは、この概念はきわめて一般的な形でしか関わってこないので、到達不能数の境界をどのような形であれ正確にする必要は生じない。実際、その境界をいかに遠くにあると仮定しても、あきらかに、到達不能な数は、有限個しかない到達可能な数に比べれば、無限に多くあることには変わりはないからである。したがって、可算集合のすべての要素に同じ確率を与えることは不可能である。というのは、もしもそのようなことをすると、選択は必ず到達不能数になるという馬鹿げた結果になってしまうからである。

こうして、以前に示唆したように、各要素に有限の確率を与え、その確率の和が 1 となるようにするしかないことがわかる。その場合、要素がどんどん先に行けば確率はゼロに近づくことになる[1]。

この確率分布に対して可能な唯一の批判は、それを正確に定めることの不可能性にある。その定める方法は無数にあり、しかも、かなり恣意的に選ぶことができる。しかし、この状況は、ポアンカレが連続確率の諸問題の研究において、任意関数の導入が果たす役割を調べたときの状況とよく似ている。かなりゆるい条件下で、最終結果は任意関数の取り方に拠らないことがわかるのである。

そこで、濃度の概念を確率の概念に置き直すと、パラドックスはすべて消滅する。自然数を任意に選択する確率、すなわち全確率は 1 は、偶数を選択する確率と奇数を選択する確率の和であり、これらの 2 つの確率は、それぞれ、$\frac{1}{2}$ に極めて近いのである。

次に別の視点から見ることにし、可算集合の単純な幾何学的表現について調べることもできよう。たとえば、土台として 0-1 区間をとり、この区間に 1 より小さい有理数、あるいはもっと単純に有限十進小数を配置することができる。どちらにしても、この区間でいたるところ稠密な可算集合が得られ、しかも、その分布の性質は何らかの均一性を持つ。上で言及したいずれの場合でも、原点 O をその集合の他の点に移す平行移動を全体に適用すると、この集合の点は他の点に一致することがわかる。ただし、いうまでもなく、点がこの区間からはみ出る場合は、1 だけの平行移動によりその点をこの基本区間に戻した場合のことである。

もっと正確にするために、有理点の集合を考えよう。この集合の利点は、

[1] 到達不能数全体に確率を与えるということについては、この先はもはや触れないことにする。この仮説を調べたとしても一般的結論に変わりはないと思われるからである。

基本区間を任意個数に等分割でき、しかも、その分割点がすべてこの集合に属することにある。このことから、明らかに、0-1 区間を何等分かしたとき、どの部分も他の部分に平行移動で移すことができ、しかも有理点はすべて有理点に移る。こうして、与えられた集合は、ユークリッドの意味で同じ n 個の集合に分割できることになる。ユークリッドの意味で同じというのは、それらが平行移動で重ね合わせることができるからである。もしも、有理点が選ばれる事象の確率を 1 とすると、その有理点が、上の n 個の部分区間の一つに属する確率は $\frac{1}{n}$ と等しく、m 個の部分区間に属する確率は、$\frac{m}{n}$ と等しい。

しかし、もしも区間の境界に必ずしもゼロではない確率を与えたいとすると、区間の境界に関連した批判があるかもしれない。その場合には、有理点の中で点 1 を勘定にいれ、0 はいれないようにし、区間を n 当分するときは、各分割点は、その左にある区間に属し、右にある区間には属さないものとしなければならない。(ただし、慣習にしたがい点 1 は点ゼロの右にあるものとする。)

さて、長さが α の、両端が無理数である区間 PQ を考えよう。この区間 PQ は、両端が有理数の可算個の隣接した区間の和とみなすことができるので、有理数が区間 PQ に属する確率は、基本区間の長さを単位としたときの PQ の長さと等しい。

以上は、実に単純なことでとても一貫しているようにみえる。孤立した各有理数の確率は、一つの有理数はいくらでも小さな区間 PQ に含まれるので、ゼロとなるが、一つの区間 PQ にまとめられた有理数の集合の確率は、とても小さくなることはあにせよ、正ではある。

しかし、ここで、乗り越えがたい困難に出会う。各有理点 $\frac{p}{q}$ を中点とする区間をとり、その長さをいくらでも小さいな数 $\varepsilon_{p,q}$ にすることができる。これらの数 $\varepsilon_{p,q}$ を

$$\sum\sum\varepsilon_{p,q}=\varepsilon \tag{1}$$

となるように、左辺の二重級数が収束しその和 ε が 1 より小さい数であるようにする。有理点が、区間 $\varepsilon_{p,q}$ 達の集合の内部に属する確率は ε となり 1 以下となるが、これは馬鹿げている。というのは、すべての $\dfrac{p}{q}$ はこの集合内にあり、しかも、ある数は何度も現れるからである。

この結果の背景にあるメカニズムを詳しく調べることは興味深い。$\dfrac{p}{q}$ の

ような点を囲む区間の長さは、関係 (1) により, 急速に小さくなるので、$\frac{p}{q}$ に対応する区間 $I_{p,q}$ に含まれる、$\frac{p}{q}$ 以外の有理数の分子 p' と分母 q' は p, q に比べるときわめて大きくなる。しかし、この $\frac{p'}{q'}$ は実のところ上の証明で何の役割も果たしていない。我々が用いたのは、区間 $I_{p,q}$ が内部に $\frac{p}{q}$ を含むという事実だけである。すなわち、$I_{p,q}$ の内部に含まれる有理数の中で、分子と分母が最も小さいもの以外は考慮していないのである。

一方、隣接した有限個の区間を考えすべての有理点が内部に含まれていると考えると、これらの区間をひとつずつ加えるならば可算個の有理数を得ることになるが、その区間の数がどんどん増えて極限ですべての有理数が含まれることになるという印象を受ける。

$I_{p,q}$ 等の区間については、全く事情が異なる。各区間について数 $\frac{p}{q}$ しか勘定しないとすると、有限個の $I_{p,q}$ からは、有限個の有理数 $\frac{p}{q}$ しかえられず、この数は、$I_{p,q}$ の個数が有限である限り有限にとどまる。極限に移行し可算無限個数の $I_{p,q}$ を考えたときにはじめて、すべての有理数 $\frac{p}{q}$ が得られることになる。

最後に次のことを注意しておきたい。上の証明に、区間 $I_{p,q}$ の大きさ、すなわち数 $\varepsilon_{p,q}$ の大きさは関係しない。それはいくらでも小さくすることができ、しかも、その区間全体はすべての点 $\frac{p}{q}$ を内部に含むが、これらの点は直線上で稠密である。つまり、直線上のどの点も $\frac{p}{q}$ の点列の極限となる。すべての点 $\frac{p}{q}$ を含む区間の集合が直線を覆わないということは想像しがたいことである。しかし、厳密な証明[2]により、長さ 1 の区間を、長さの和が 1 より小さい区間の集合で覆うことができないと認めざるを得ない。

[2] 私は学位論文 (1894 年) で初めて厳密な証明を与えた。それは私の「関数論講義」に含まれている。

以上から、有理点の集合のように、直線上の至る所稠密な可算集合に対し、単位線分の有限等分に基づいてユークリッド的な測度もどきを定義することはできないことがわかった。しかしながら、与えられた長さの線分上に点 $\frac{p}{q}$ が見いだされる確率は、その線分の長さに比例するようにせざるを得ないように思われる。しかし、今見たように、そうすると、長さの合計が ε である線分 $I_{p,q}$ を考えることで不合理な結論に達するのである。というのは、どの数 $\frac{p}{q}$ も、ある線分 $I_{p,q}$ の内部にあるからである。

したがって、両端が有理数の 2 区間は、みかけと異なり、同じ長さであっても、内部の有理数に関しては、同確率と考えてはいけないことがわかった。この同じ長さの区間は、しかしながら、有理数だけの平行移動により重ね合わせることができ、従って、各区間内の有理数は互いに一対一に対応する。それゆえ、有理点が一方の区間に属する確率ともう一方に属する確率とは同じであると結論できるように見えたのであった。

このパラドックスをもっとよく理解するために、性質がかなりややこしい有理数の集合を考えるかわりに、もっと単純で我々がよく親しんでいる十進数の集合を考えてみよう。

そこで、0-1 区間上に分割点を十億個とることにし、最初の点 A は座標が 20 億分の一で、次は座標が 10 億分の一だけ増えるとする。したがって、座標が 10 億分の一の整数倍であるような点は、上の区間のいずれかの中点になる。

しかし、座標が 10 億分の一の整数倍である点の中で、座標が十分の一の整数倍、百分の一の整数倍、千分の一の整数倍、等々は注目すべきものと考えるのが自然である。もしも、座標が千分の一の整数倍である点に着目すると、その数は 1000 であり、対応する 10 億分割区間全体の広がりは百万分の一である。こうして、千等分点の全体を区間群で覆うことができ、その全体の長さは百万分の一となる。10 億と千を、それぞれその自乗に置きなおして同じ議論を行うことができ、その場合は、全体の長さが百万分の一の自乗である区間群をえる。以下同様に続けることができる。こうして、$\frac{p}{q}$ に対して行った証明を再び得ることになる。

すると、二区間

0.1339999995 から 0.1340000005 と 0.1346178925 から 0.1346178935.

の間の違いは何であろうか．それは、前者が内部に 0.134 を含んでいるのに対し、後者の内部の点は少なくとも 9 個の数字を含み、最も単純なものが 0.134617893 である、という点にある。したがって、前者は後者よりも確率が大きいと考えるのが自然である、といっても、相対的確率を正確に定めることはできないが。

こうして、線分上の有理点あるいは十進点を考えることにより、自然数のような抽象的可算集合における確率の研究から導かれた観点を再び見いだしたことになる。集合のすべての要素に同じ確率を与えようとすると確率はゼロになるという矛盾に至るので、それぞれに与える確率の和は収束級数となり和が 1 にならなければならない[3]。この確率の値が正確に与えることができないという批判にとらわれてはならない。実際、すでに指摘したように、同様の現象についてポアンカレは連続確率の場合について注意を喚起している。種々の問題において、連続性についてのおおまかな条件だけが課せられた任意関数を導入するのだが、問題の解決は、その任意関数の選びかたによらないのである。

同じように、可算確率についても、集合の要素が到達しにくくなればなるほど確率は小さくなり、到達不能数になると確率は極めて微小になることが本質的な点である。

十進数については、たとえば、次のように確率を与えることができよう。高々10 桁の十進小数の集合には確率 $\frac{1}{2}$ を与え、次に 11 桁から 20 桁の十進小数全体については確率 $\frac{1}{4}$ を与え、21 桁から 30 桁のもの全体には確率 $\frac{1}{8}$ を与え、以下同様にするのである。各グループでは、各要素に同じ確率を与えることもできるし、あるいは、同様の法則で分けてもよい。たとえば、1 桁から 10 桁の十進小数全体に確率 $\frac{1}{2}$ を与えた場合、1 桁の数全体に $\frac{1}{20}$ を、2 桁の数全体に $\frac{1}{20}$ をというように決めていき、最後に 10 桁の数全体に確率 $\frac{1}{20}$ を与えるのである。

終わるにあたって、最後に次のことを指摘しておこう。ある区間の全確率を知るためには、この区間の中で最も確率の高い点を見いだすとともに、それ以外の点を明確にすることには一定の意義がある。この注意をこれ以上

[3] ここでは話を簡単にするために、到達不能数について指摘した §22 での仮定を述べることはやめておく。

は追求しないことにするが、いろいろな応用ではもっと正確にすることができる。

7.3 球面上の可算集合

ハウスドルフが最初に指摘した特異な性質を持つ可算集合を球面上に定義できるが、その特異性は前節の考察を使って明らかにすることができる。

球面 S と、その上に直径 AA' と BB' を考え、それらが角度 θ をなすとする。AA' を軸とする角度 $180°$ の回転を φ とし、BB' を軸とする角度 $120°$ の回転を ψ で表すことにすると、

$$\varphi^2 = 1; \quad \psi^3 = 1. \tag{1}$$

が成り立っている。この関係式 (1) により、φ と ψ を勝手な仕方で合成して得られる回転は次の形に書くことができる：

$$R = \psi^{\alpha_1}\varphi\psi^{\alpha_2}\varphi\psi^{\alpha_3}\cdots\varphi\psi^{\alpha_{n+1}}, \tag{2}$$

ただし、指数 α_1, α_{n+1} は 0 か 1 か 2 のいずれかだが、$\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ は 1 か 2 のどちらかである。$n = 0$ かつ $\alpha_1 = 0$ のときは R は恒等変換 1 を表すことになる。$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ の他の値については R は 1 にはならないと仮定することができる。この仮定は以下の理由により妥当である。R の値は可算個しかないが、それらの一つが 1 であるとすると θ についての方程式を得るが、それは $\tan\theta$ については有限次代数方程式となるので、R が 1 となるような θ の値は可算個しかない。したがって、θ として、これらの特殊な値のいずれとも異なるように選ぶことができるのである。

球面上に A, A', B, B' のいずれとも異なる点 M をとる。可算個の回転 R を M に施すと、互いに異なる可算個の点 MR を得る。回転 R_1, R_2 の積は回転 R のいずれかとなるので回転 R の全体は群をなる。従って、点 MR のなす集合 E は回転 R によって不変となる。すなわち、どの回転 R によっても E は自分自身の中に移される。集合 E が球面上で稠密であることが簡単にわかる。それを示すのに、点 MR の全体は、有限の曲面上の可算無限個の集合であるので、少なくとも一つの極限点を持ち、したがって、点 MR 同士の距離はいくらでも小さな値をとる、という事実を利用する。点 MR を他の MR' に移す回転 ρ はいずれかの R である。実際、

$$MR\rho = MR'$$

ならば $\rho = R^{-1}R'$ となるからである。[4] したがって、いくらでも小さい回転を持つような R が無数にあることがわかるが、このことから、E が稠密であることが容易に示される。

以上より、球面上の点 MR 全体のなす集合 E は、前節で考察した直線上の有限区間（あるいは円周 (circonférence) 上）における有理点の集合と類似したところが大きいことがわかる。どちらの場合も、対応する 2 点が MR の集合に属するような同じ 2 領域があれば、その一方を他方に移す回転があり、しかも、一方の領域の点 MR は、もう一方の同様な点に重なる。[5] このことから、点 MR をランラムに選んだとき、それが合同な領域に属する確率は同じであることが導かれて、その確率は領域の面積に比例すると結論できるように見える。しかし、この結論は直線上の線分の場合と同様に反駁される。実際、各点 MR を中心とする可算無限個の円領域を構成し、しかも、その面積の和がいくらでも小さくなるようにすることができるからである。

このことにより、点 MR それぞれに、すなわち回転 R それぞれに、ゼロでない確率を与え、それの和が 1 となるよう[6]にしなければばならない。こうして、ハウスドルフの逆理という名を与えることができる、逆理的な事実を説明することができる。

この逆理の一つの説明は以下の通りである。回転 R を以下のように 3 つの類 A, B, C に分類しよう。すぐあとに述べる例外を除き、類 A は、最後の因子が φ である回転 R からなり、類 B は最後の因子が ψ のもの、類 C は最後の因子が ψ^2 のものからなる。例外として、n がゼロか正の場合に、$(\varphi\psi^2)^n$ の形のものを類 A に入れ、$(\varphi\psi^2)^n\varphi$ の形のものを類 B に入れ、$(\varphi\psi^2)^n\varphi\psi$ の形のものを類 C に入れる。従って、次のように書くことができる：

$$(3),\qquad \left\{\begin{array}{lcl} A &=& X\varphi \ + \ (\varphi\psi^2)^n \\ B &=& Y\psi \ + \ (\varphi\psi^2)^n\varphi \\ C &=& Z\psi^2 \ + \ (\varphi\psi^2)^n\varphi\psi \end{array}\right.$$

ただし、X, Y, Z は二つの条件を満たすものとする：一つは、X は φ で終わることはなく、Y, Z は ψ で終わることはないという条件で、もう一つの条件は、上の三つの和における第二項と矛盾しないことである。したがって、$X = 1$

[4]訳注: M を固定する回転が 1 だけというわけではないので、ここの議論はおかしい。$R^{-1}R'$ は MR を微小にしか動かさないが、MR が $R^{-1}R'$ の回転軸のすぐそばにある場合には $R^{-1}R'$ の回転が微小とは限らない。

[5]訳注: これもおかしい。合同な二領域 P, Q で、$P\rho = Q$ であり、しかも、ある $x \in P\bigcap E$ について,$x\rho \in Q\bigcap E$ のとき、$\rho \in R$ ということかもしれないが、これもおかしい。

[6] 定義に現れた n が到達不能であるような、到達不能な R に有限の確率を残しておくことにすれば、高々1 になるように、ということもできる。

であってはいけない、というのは、$n=0$ のとき $(\varphi\psi^2)^n\varphi$ は B に属するからである。

関係 (1) を考慮すると、関係 (3) より容易に次を得る：

$$(4). \qquad \begin{cases} A\varphi & = & B+C, \\ A\psi & = & B, \\ A\psi^2 & = B\psi = C. \end{cases}$$

実際、$X\varphi$ は $(\varphi\psi^2)^n\varphi\psi\varphi$ という形となる可能性があるが、これに φ をかけると $(\varphi\psi^2)^n\varphi\psi$ となり、C に属する。

関係式 (4) が Haussdorff の逆理を与える。実際、この関係式において A, B, C が、各々の確率を表すと考えることが仮にできるとし、さらに、確率が回転 φ, ψ で不変であるとすると、

$$(5). \qquad \begin{cases} A & = B = C, \\ A & = B+C, \end{cases}$$

という方程式が成り立ち、これより $A=B=C=0$ となる。

同様に、確率の場合に成り立つ自明な関係式

$$A+B+C=1$$

を認めると、(5) より

$$A=\frac{1}{3} \text{ かつ } A=\frac{1}{2}$$

を得る。

以前の考察の結論通りに各回転 R に正の確率を与えることにすれば、このパラドックスは解消する。この確率を定義するために、R を与えるのに用いた式 (2) をもう一度取り上げて詳しく見てみよう。R は多様性が大ききが、それは、ψ の指数として 1 または 2 を自由に選べることからくるが、それらを区切る φ の方はいつも同じで φ しかない。回転 ψ^2 が ψ よりも複雑とみるべきか簡単とみるべきかを判断する根拠は全くない。というのは、これらは互いに逆の変換であり、円に内接する正三角形を自分自身に重ね合わせる変換同士が互角なのと同様である。そこで、

$$(6) \qquad R=\psi^{\alpha_1}\varphi\psi^{\alpha_2}\varphi\cdots\varphi\psi^{\alpha_n}$$

で定義された次数 n の回転 R を考え、回転 $R, \varphi R, R\varphi, \varphi R\varphi$ の４つはいずれも、1 と 2 からなる数列

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

に対応するものと決めるよう。

この数列は二進小数

$$\frac{\alpha_1 - 1}{2} + \frac{\alpha_2 - 1}{2^2} + + \frac{\alpha_3 - 1}{2^3} + \ldots + \frac{\alpha_n - 1}{2^n} \tag{7}$$

と一対一に対応する。各 n の値に対し、$0, 1$ の n 個の数字は 2^n 個ある。ただし、n がゼロのときは、回転 R は恒等回転になり、恒等回転を 1 で表すと、４つの回転 $R, \varphi R, R\varphi, R\varphi R$ は２つの回転 $1, \varphi$ に帰着する。それ以外の場合は、回転 R に４つの回転を対応させ、それらは同じ確率をもつとする。これらの確率は、数 (7) のなす集合、すなわち、1 より小さい数で、奇数を 2 のべきで割ったものの全体の集合の場合と同じように定義する。2^n より小さい奇数は 2^{n-1} 個あり、同じ数だけ位数が実質的に n と等しい数 (7) があり、各々に対し 4 個の回転が対応するから、位数 n 以下の数 (7) に対応する回転 R は 2^{n+1} 個ある。すぐわかるように、これらの 2^{n+1} 個の位数 n の回転の中で、A に属するのは 2^n 個、B に属するのは 2^{n-1} 個、C に属するのも 2^{n-1} である。実際、容易にわかるように、回転 $R\varphi$ と回転 $\varphi R\varphi$ は次の例外を除いて A に属する。例外は、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ がすべて 2 の場合で、この場合、$\varphi R\varphi$ は $(\varphi\psi^2)^n\varphi$ なので B に属する。しかし、一方、これらの α に対し、φR は A に属する。同様に、α_n が 1 か 2 に応じて、R の半分は B に属し、半分は C に属する。φR についても同様だが、α がすべて 2 の場合が例外となるが、その場合には $\varphi R\varphi$ が B に属するが、一方、α が $\alpha_n = 1$ 以外は 2 となる場合には、φR が B ではなく C に属する。

[7]

[7]訳注: 以上、は次のように整理できる：
A に属するものは、以下により 2^{n+1} 個

- $R\varphi$: 2^n 個
- $\varphi R\varphi$: $2^n - 1$ 個（例外:$(\varphi\psi^2)^n\varphi \in B$）
- φR の中で $(\varphi\psi^2)^n$: 1 個

B に属するものは次の 2^n 個

- $\varphi R\varphi \ni (\varphi\psi^2)^n\varphi \in B$:1 個
- φR,$\alpha_n = 1$: $\neg(\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 2)$: $2^{n-1} - 1$ 個

回転 R の 2^n 個が A に属し、半数 2^{n-1} 個の回転 R が B または C に属する。従って、回転それぞれの確率は n に依存するが、その依存の仕方によらず、A の確率は B と C の確率の倍となる。これは、前節で指摘した注目すべき事実の例となる。その事実というのは、可算集合における確率を決めて得られる結論は、たいてい確率の選びの方が自明な一般的条件を満たしている限り、その選び方によらないというものであった。この条件は、今の場合は、数 n を与えたとき、数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ のどの選び方にも同じ確率を与えるというものである。

なお、R と $R\varphi$ には同じ確率を与えながら、$R\psi$ と $R\varphi\psi$ には同じ確率を与えていない、と批判する人もいるだろう。しかし、よく考えると、何も矛盾がないことがわかる。$R\varphi$ は R を与えると唯一正確に定まるのに対し、$R\psi$ と $R\psi^2$ とは、回転の違いを除いて、R から同じ仕方で得られるので、それらのいずれを選ぶかを決めなければならない。というのは、左の回転と右の回転のいずれを選ぶかということの基準は全くなく、その選択は二次的な複雑さを生むのである。実際、n 個の選択には可能性が 2^n 個あり、この数は急速に増大する。我々の提案はこうして完全に正当化されるのである。[8]

以上から結論されることは、可算集合の各要素の確率を正確に定めることは必要ではなく、その要素を無限個の簡単な類にわけ、各類は有限個の要素を含むようにし、各要素には等確率を与えるようにすれば十分だということである。たとえば有理数の可算集合を考えるときは、既約な有理数 $\dfrac{p}{q}$ を、同じ分母 q をもつものに類別することが可能である。あるいは、整数の全体を考えるときは、十進法あるいは、もう恣意性が少ない二進法などの表記法を選び、表記に現れる数が同じものを同じ類に分けることを考えることができる。

- R: $\alpha_n = 1$: 2^{n-1} 個

C に属するものは次の 2^n 個

- $\varphi R, \alpha_n = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 2$: すなわち $(\varphi\psi^2)^{n-1}\varphi\psi$: 1 個
- $\varphi R, \alpha_n = 2, \neg(\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 2)$: $2^{n-1} - 1$ 個
- R: $\alpha_n = 2$: 2^{n-1} 個

[8]訳注: この節はやや意味不明。$R\psi$ と R は位数が違うので異なる確率になるが R と $R\psi$ は回転 ψ しか違わないので、同じであるべき、という反論か。適切な訳注が必要。

7.4 連続体の濃度

今度は、連続体の濃度を調べよう。この濃度は可算の濃度より大きいことはわかっているが、一方で新しい種類の困難がある面ではあるとしても、確率（あるいは測度）の問題は、連続体の場合は可算の場合に比べてより単純であることが確認できるのである。

このことは、まず、長さ・面積・体積の概念が原初的な概念であり、ユークリッド幾何学は、まさにこれらの原初的概念を明確にし、それらについての具体的な問題を解決するために構成された、ということとに関連している。しかし、この歴史的な事実は、これらの原初的概念が、学問の発展により、明らかにされ、乗り越えられ、場合によっては、矛盾したものとして排除される可能性もないわけではない。

連続体と可算の間にある第一の本質的相違点は、連続体のすべての点に正の確率を与え、その和を1にすることはできない、ということである。これは、和が有限個となる正の数 u が無限個与えられた場合、その個数は必ず可算になる、という事実に拠る。実際、どの n についても $\dfrac{1}{n}$ より大きい u の個数は必ず有限個でなければならない。というのは、そうでなければ、u の和が無限になってしまうからである。従って、$\dfrac{1}{n}$ と $\dfrac{1}{n+1}$ の間にある u の個数は有限であり、結局 u の全体は可算であることがわかるのである。

したがって、連続体の各点だけでなく、有限個の点、あるいは、可算個の点ですら[9]、確率が厳密にゼロとなることを認めざるを得ないことになる。このことから、同じ（従って互いに重ねあわすことができる）二区間は、たとえ、これらの区間の到達可能な点についてどのような違いが見いだされようとも、同じ確率をもつと考えなくてはならないという結論を得る。その理由は、到達可能数は有限個（あるいは、到達可能性の意味をもっと広くして、たとえば有理点をすべて到達可能と考える場合でも、高々可算個）しかないからである。要するに、連続体の実質は到達不能数から構成されているのである。この理由により、連続体は全く等質であり、重ね合わせることができる同じ長さの区間は区別不能なのである。

以上に指摘した点に基づき測度を構成的に定義することができる。これは拙著「関数論講義」(1897) で解説したもので、ルベーグにより測度Bと呼ばれている。ルベーグが定義した、より一般的な測度Lが、測度Bと本質的

[9] 実は可算個の可算集合を用いても連続体を尽くすことはできない。

に違う点は、測度がゼロの集合だけの違いしかない集合同士は、たとえ測度Bの意味では可測ではないとしても、同じ測度をもつとする点にある。しかし、私は上で引用した本で、測度は負となることはできないので、もしもある集合の測度が0以下であることが証明できれば確実にゼロと等しいことになる、ということを確認していたことを指摘しておきたい。測度ゼロという言葉を、普及した零測度という言葉に置き直したのはルベーグであった。

以前、確認したように、有理数を座標とする点はの和が ε となるような無数の区間で覆うことができ、しかも、この数 ε はいくらでも小さくできる。この区間全体は測度 ε の集合 E を成し、その補集合 $C(E)$ の測度は $1-\varepsilon$ である。この補集合は完全であり、どの区間においても稠密ではない。というのは、E が区間上至るところ稠密だからである。どの区間も含まない $C(E)$ のような集合の測度が $1-\varepsilon$ であることは、連続体は併置された区間から形成されていて、その区間をいくらでも小さくできるが有限個である、という連続体についての直観的概念と矛盾するように見えた。これは、学問の進歩がもたらした新しい概念が、幾何学的直観と調和しなくなるような場合の一例である。なお、幾何学的直観といっても、結局のところ、何世紀も昔に行われた経験の一般化に他ならないのである。ずっと昔から有理点を小さい区間で覆うという単純な経験をすることができたはずであるが、だれもその考えに思い至っていないか、少なくとも、この考えを具体的かつ精確に述べた人はだれも居ないように見える。私は学位において、ポアンカレによるある有理関数級数の研究から着想を得て除外区間の方法を展開し、そこからすぐに測度が正で稠密でない完全集合を得たのであった。

こうして、連続体の確率は簡単な方法で定義できることがわかった。この確率は、十進法で１０個の各数字に同じ確率を与えることで定義される確率と一致する。また、これまで調べてわかったように、どのような記数法で表示された数に対しても適用される変換を色々な方法で定義することができるが、その変換は、たとえば一次元の連続体を、零測度の集合、あるいは、多次元の連続体に置き直すことにより確率を改変するのである。このことから、連続体の濃度の概念は、測度の概念とは全く異なる概念であり、要約すれば、かなり粗いものである、という結論を得る。一次元の場合に限ると、測度の概念は、直線上の点の特定の配置に結びついている。直線上のどの点も、定まった方法で移動できることを考えると、可算集合の点を平行移動することから得られたのと同じくらい逆説的な結論を得ることができる。同じように、数の対と自然数とは同じだけの個数があり、直線の区間の点は正方形の点、あるいは零測度の点と同じだけの個数がある。しかし、これらの変換は、0と1の間にある（個数がはるかに多い到達不能数も含む）数を表す点の区間における位置をとらえるのに不可欠な測度や確率の概念との関係が

見えない。到達不能数について論理的に研究できるのは、確率的な視点からである。というのは、定義そのものにより、到達不能数の一つを精確に定義することができないからである。すなわち、一つの到達不能数を他と区別し、それについて議論する数学者が同じ数について議論していると確信がもてるようにすることはできない。あとの章で再び取り上げる Zermelo の選択公理は次のことを可能だとして許可するものである：到達不能数から一つの特定の数を選び、それに文字 a を割り当て、しかも、この文字 a が、どの数学者にとっても同じであるような、紛れなく決まった数を表すとすることが可能である。さらに、そのあと、a と異なると認める数 b を選ぶことができ、以下同様のことを続けることができる。これが Zermelo の選択公理の内容である。この公理をひとたびみとめるならば、矛盾に導かれない限り、それに基づいて整合的な理論を構築することができる。しかし、推論はすべて Zermelo の公理に依存しており、この公理を認めない人たちによっては拒まれる可能性がある。これは、ユークリッド幾何学や非ユークリッド幾何学が、各々の公理系を認めない人によって拒まれる可能性があるのと同じことである。

Chapter 8

到達不能集合

8.1 到達可能集合

集合の到達可能性については、その集合のすべての要素が到達可能であるということを要求すべきではない。さもないと、連続体自身を到達不能であると考えなければならなくなるし、たとえ可算であっても無限集合はすべて到達不能と考えなければならなくなる。なぜかというと、可算集合でも実質的に到達不能な点を含んでいるからである。もっとも、到達不能となる境目は厳密に定めることはできず人の寿命が長くなったり人の能力が増すにつれて境目は後退していくので、この到達不能性は相対的な到達不能性というべきところだが。

そこで、２人の数学者がある集合について議論しているときに同じ集合について議論していることを２人が確信できるような仕方でその集合が定義されるとき、その集合は到達可能である、ということにする。場合によっては、定義から数値的情報を得ることができる要素は一つもないことはありえるし、またある要素についてそのような情報が得られたとしてもそれは定義から直接に得られるのではなく、証明されてはいたが百年あるいは二百年も知られずにいた何らかの数論的性質により得られることもありえる。

一方、このことから、ある集合の定義によっては、その集合の要素を一つとして特定することができないような場合でも、ある年に、あるいは、ある世紀に、その集合のある要素を特定することが学問の進歩により可能となることもありえると結論することができる。

簡単な例を一つ挙げよう。1 より小さい分数 $\dfrac{p}{q}$ で既約なものに対し、区間

$$\frac{p}{q}-\frac{1}{q^3},\quad \frac{p}{q}+\frac{1}{q^3}, \tag{1}$$

を対応させておく。分母が q で既約な分数で 1 より小さいものの数はもちろん q より小さい。従って、区間 (1) 全体の和は、

$$\sum \frac{1}{q^2}$$

より小さい和をもつ収束級数となる。

一方、区間 (1) 全体は、0-1 区間内で到るところ稠密となる。というのは、この区間内のどのように小さな部分にも、分数 $\dfrac{p}{q}$ が無数にあり、従って、(1) のような区間も、長さがゼロに近づくゆえに、無数に含まれるからである。

このことから、どの区間 (1) でも稠密な集合 E を次のように定義する。点 A が E に属するための必要かつ十分な条件は区間 (1) の無限個に含まれることだと定義するのである。これが稠密なのは次のように確かめられる。区間 MN を勝手に与えたとき、MN の内部には区間 (1) が無数に含まれる。その中で q が最も小さいような区間の一つを M_1N_1 と書くことにする。同様に、区間 M_1N_1 の内部には、区間 (1) が無数に含まれるが、数 q が最も小さいような区間の一つを M_2N_2 と書くことにする。同様の操作を限りなく続けることで、区間 $M_1N_1,M_2N_2,M_3N_3,\cdots,M_nN_n,\cdots$ を定義し、それぞれの区間は、その前に並ぶ区間に含まれ、しかも、長さがゼロに近づくようにできる。というのは、これらの区間はすべて (1) のタイプの区間で、しかも、q は単調に増大するからである。よって、これらの区間 M_kN_k は共通点 A をもち、A を内点として含む (1) のタイプの区間が無数にあるので、A は E に属する。

このように定義される点 A は、区間 MN を与えると明確に認知される。ただし、区間 MN が、q が最小であるような区間 (1) を二つ以上内部に含む例外的な場合には、p が小さい方、すなわち、最も左の方を選ぶことにする。

さらに、A と同様の無限個の点を次の方法で定義することができる。先ほどの方法で区間 M_kN_k に到達したとする。次の区間として上で選んだような、q が最も小さいような $M_{k+1}N_{k+1}$ のかわりに、M_kN_k の中で、$M_{k+1}N_{k+1}$ の外にある区間 $M'_{k+1}N'_{k+1}$ で、これまで同様に、q が最も小さい区間 (1) を

選ぶ。このようにすると、明らかに A とは異なる点 A' が得られる。上の操作は、一連のプロセスのどの段階でも繰り返すことができるので、このようにして得られる A の全体は連続体の濃度をもつ無限集合をなす。実際、k 番目の操作において $M_{k+1}N_{k+1}$ を選んだか $M'_{k+1}N'_{k+1}$ を選んだかに応じて二進小数の k 位のところに数字 0 か 1 を書くことにすると、0 と 1 からなる異なる可算数列、すなわち、二進表記された 0 と 1 の間の異なる二数から、異なる点 A と A' を定義することができる。よって、連続体の濃度だけの無数の点 A が得られる。なお、最初に定義した点 A は数 0 に対応する。

以上指摘したやりかたは、点 A の座標を次第に精確に計算することを可能とするが、この座標を正確に知ることは決してできず、そのことから、予見できない発見を別にすると、E に属する、という A に与えられた性質以外のいかなる性質をも知ることができない。

しかし、連分数の性質を使うことにより、到達不能な数 ξ で、無数の q について

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \tag{2}$$

となる。従って、数 ξ を含む (1) のような区間は無数にあることがわかる。

実際、ξ の連分数展開の n 番目の簡約化を $\dfrac{P_n}{Q_n}$ と表すと、

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1} Q_n^2} \tag{3}$$

となる。

もしも

$$a_{n+1} > Q_n, \tag{4}$$

ならば、

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^2} \tag{5}$$

となる。

さて、

$$Q_n < (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$$

がわかっているので、関係 (4) が成り立つためには

$$a_{n+1} \geq (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$$

とすればよい。

この条件は以下のようにおくと満たされる：

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a_1 & < & 10, \\ a_2+1 & = & 10, \\ a_3+1 & = & 10^2, \\ a_4+1 & = & 10^4, \\ a_5+1 & = & 10^8, \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots,} \\ a_{n+1}+1 & = & 10^{2^{n-1}}, \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}\right.$$

すると、連分数 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ で定義される数 ξ は、無数の q について関係式 (2) を満たす。無数の a_n を小さい数に勝手に変更することで、ξ と同様の数を無数に定義できることは明らかである。ただし、a_n の中の無限個については値を変更しないものとする。したがって、奇数の n について (6) を

$$a_{2n+1} = 1$$

あるいは

$$a_{2n+1} = n$$

あるいは

$$a_{2n+1} = n^2 \text{ あるいは } 2^n$$

に変更してもよい。

こうして定義される数 ξ は、集合 E に属し、かつ、どの不完全商も正確に知ることができる連分数に対応するという二重の条件を満たすが、それに対し、最初に定義した点 A については、確かに十進展開の各桁の数字をいくらでも先まで計算できるし、また、連分数展開の不完全商をいくらでも計算できるのだが、しかし、無限に到るまでの規則を知ることはできない。

さきほど定義した集合 E は測度零である。それは以下のようにして確かめられる。定義より A が E に属する条件は A を含む区間 (1) が無数あるとい

うことなので、区間 (1) の中から有限個を任意に除いても E の定義には影響はない。もしも q が与えられた整数 k より小さいものをすべて省くことにすると、区間の和は

$$2\sum_{k}^{\infty}\frac{1}{q^2}$$

より小さくなる。この和はだいたい $\dfrac{2}{k}$ となるが、それが与えられた数 ϵ より小さくなるように k を選ぶことができる。よって、和の長さが ε より小さい区間の集まりがあり、E のどの点 A もその区間のいずれかに含まれる。ε はいくらでも小さくできるので、以上により、E は測度零であることがわかった。

区間の長さの和の収束する速度の速さに応じて、E のような集合が希薄度が高まると考えることができるだろう。しかし、希薄性の多少がどうであれ、それらは、とても気になる注目すべき性質をもつ。

E のような二つの集合の交わりは、いたるところ稠密かつ測度零で、しかも濃度は連続体と同じである。

これを示すために、到るところ稠密な区間の列 S から定義される集合 E と、同じ様な区間の列 S' から定義される集合 E' を考えよう。S の区間 T を選び、次に S' の中から T に含まれる区間 T' を選び、次に、S の中から T' の中に含まれる区間 T_1 を選び、そのあと、T_1 に含まれる T_1'、T_1' に含まれ T_2、T_2 に含まれる T_2'、という具体に限りなく区間を選んでいくことができる。すべての T に含まれる点 A は明らかに E にも E' にも含まれる. というのは、A は無限個の T にも、無限個の T' にも含まれるからである。

このことから、どの E と E' でも、そのベクトル和として 0 と 2 の間にある任意の点 x を含むことがわかる。実際、α' が E' の要素であるような $x-\alpha'$ 全体の集合 E_1' は、E' と同じような集合なので、E との共通点が無数にある。したがって α' が E' の点で α が E の点でしかも

$$x-\alpha'=\alpha$$

となるような α' は無数にあることがわかった。言い換えると、任意の x は、E の要素 α と E' の要素 α' により $x=\alpha+\alpha'$ と表示できることになるので、$E+E'$ に属することがわかった。

この結果の証明を記したのは、存在を証明した点 α,α' は E の点と同じようなやりかたで定義され、ξ と同じようには精確に定義されていないことを見るためであった。

こうして、到達可能集合についての諸問題の間にある違いを認めることができる。一つは解決が完璧で精確な問題群である。すなわち、解決が到達可能数で与えられ、その数を定める問題に含まれてはいない性質が少なくとも一つはわかるような問題群である。もう一方は、その解決となる数 A が、ある程度近似計算はできるが、それ以上のことは何もわからないような問題群である。それどころか、ある種の問題群については、解が存在することは証明できるが、その十進展開の最初の数字ですら計算する方法がわからないという意味で、その数には全く近づくことはできない、という場合があることも推測できる。

8.2　十進小数近似という幻想

前節は、通常のように次のことが前提となっていた。すなわち、ある数 A を知ろうというとき、その十進展開に出てくる数字をいくつか計算できることは実質的な進展である、ということが当然なこととなっていた。実際、もしも、時間をかけて忍耐強くやれば段々先の新しい桁まで計算できるのであれば、A についての完全な知識に近づくように見える。

しかし、しばしば、特に、先ほど調べた集合 E の場合、近似的計算についての上述の考えは幻想でしかなく、近似的計算は何も厳密には教えることがないのである。

実際、集合 E の点は直線上で到るところ稠密であることを先ほど見たが、これは、次のことを意味する。どの有限小数が与えられても、それがたとえ小数点以下百万桁の小数であっても、これと百万桁まで一致する E の点は無数にある。したがって、E のある点 A の十進展開をある桁まで計算することで何かを意味のあることを知り得たと考えるのは幻想であることがわかる。実際、それらがどのような数列であろうと、A のような無数の点の展開に現れる一方、E には属さない無数の数の十進展開にも現れるからである。もちろん、E と E' の共通部分を、先に指摘した方法で計算する場合についても、近似計算の無意味なことは同様である。

したがって、可能な限り E の点を実効的に定義することを試みることが重要である。ここで、実効的定義というのは、すべての部分商が無限にいたるまで確定できる連分数展開による ξ の定義のようなものを念頭に置いている。確かに、それらはすぐに大きくなり計算することだけでなく簡約した形式で書くことすらできなるが、その部分商を定めていく規則は、ξ の何らかの性質を証明することを可能にするという点で、それらの規則は精確なもの

であるということができる。これに対し、十進展開のある桁まで計算しても、E の要素としての A については何もわからない、というのは、それと同じ部分を含む十進展開をもちながら E には属さない点もあるからである。

集合 E に含まれる区間は存在しない。実際、ある区間が E に含まれるとすると、長さの和がその区間より小さい区間群で E を定義すると、その区間は、この区間群によって覆われることになり、区間群の長さの和は、この区間の長さより大きくなり矛盾する。従って、補集合 $C(E)$ も E と同様に到るところ稠密となり、その点の数値的な知見について上と同じ困難が生じる。有限個の数字の計算では知見は少しも増えないのである。これから調べるようとしている稠密ではない完全集合については、上の厄介な事情は生じない。

8.3 稠密ではない完全集合

色々な問題でしばしば登場するこの集合は次のように定義される。基本区間の内部に一つの区間を設置する。ただし、それを除外したとき、二区間が、左に一つ右に一つ、残るようにする。次に、残った二区間各々の中に、除外区間を設置し四区間が残るようにする。同じような操作を際限なく繰り返すと、設置された除外区間の個数は、$1, 2, 4, 8, 16, \cdots$ となり、各操作後に残る区間の個数は $2, 4, 8, 16, 32, \cdots$ となる。極限において、無数の除外区間を設置したことになるが、それらの長さは収束級数をなし和 s は 1 以下となる。s が 1 より小さい場合は、極限において残留する点が、ある所で区間を成すことも論理的にはあり得るが、そういうことはないものと仮定し、集合 E はどこでも稠密にはならないと仮定しよう。そうすると、この集合は除外区間の点の極限点の集合としても定義することができるので、これらの極限点をすべて含むこの集合は、完全なことがわかる。その測度は $1 - s$ なので、ゼロとなることも、正となることもある。

E のような集合の最初の例は、有名なカントールの三進集合である。この集合は測度零の集合で、三進小数展開で 1 を使わず 0 と 2 だけで書ける[1]点全体である。この場合は、s が 1 だから測度零ということがわかるのである。測度 0.5 の集合 E を次のように定義することができる。まず、最初の除外区間を基本区間の中央に置き長さを $\dfrac{1}{4}$ とする。次に、2 区間それぞれの中央に

[1] どの除外区間の端点も、数字 1 を用いて書けるが、三進小数についてなりたつ等式 $0.1 = 0.0222\ldots$ により、0 と 2 だけでも書くことができる。

同じ長さの区間を置きその和が $\frac{1}{8}$ となるようにする。次に、残る 4 区間それぞれに同じ長さの 4 区間を置き長さ全体が $\frac{1}{16}$ となるようにし、以下同様に続ける。除外区間の長さの全体は確かに 0.5 となる。

集合 E の点を定めるに、残された区間を除外区間で二分する毎に、左の区間を 0 で表し、右の区間を 1 で表すことにする。そうすると、二進小数

$$x = 0.101101\ldots,$$

のように表された数により、どんどん小さくなる減少区間列が定義でき、極限点として集合 E の点を定める（この点は、x の数字がある桁より先がすべて 0 となるかすべて 1 となる場合以外は、除外区間の端点にはならない）。

こうして、E の点と 0 と 1 の間にある数の集合の間に全単射が実現する。E の点は、対応する x が到達可能な場合に、到達可能だと考えることができる。こうして集合 E について知り得ることは連続体について知り得るのと同様である。すなわち、無限個の到達可能な点があり、さらにもっと多くの到達不能な点がある。除外区間の定義の仕方によって到達可能な点の座標を実効的に計算することは易しくも面倒にもなる。実際、除外区間の端点の座標の計算は、場合によっては、極めて時間がかかり煩雑になる。次節ではもう少し詳しく、しばしば到達不能となる重要な集合の類について述べる。それは、漸近的に定義される集合である。

8.4　漸近的定義集合

要素となる数が数値的表現の無限における振る舞いに基づいて定められている集合のことを漸近的定義集合と言うことにしよう。この集合の類の面白いところは、その要素を決めることは、場合に応じて、とても易しかったり、とても錯綜していたりすることである。

まず簡単な例から始めよう。π のような、よく知られた無理数を一つ与え、十進小数展開のある番後から先の桁が、π の十進小数展開における対応する桁と一致する数全体の集合を考えよう。別の言い方をすれば、これらの数の十進小数展開は漸近的に π の十進小数展開と一致するということになる。ただし、この一致は場合によっては $10^{1000000}$ 番目を超えた桁以降になることもあり得る。

明らかに、この集合の数はすべて、整数のずれは別として、π に勝手な有限十進小数を加えて得られる。したがって、この集合は、よく知られた可算集合である有限十進小数全体の集合とよく似た性質をもっている。このような集合は到達可能な数と相対的に到達可能な数を含む。ただし、ここで相対的に到達可能といったのは、私達人類より遥かに長い生命と持ち知性が私達よりもっと鋭い存在にとっては厳密に到達できる、という意味である。

もしも、十進表記の替わりに階乗記法を用いて集合 E を次のように定義できる。すなわち、E に属する数の階乗記法による展開

$$\frac{a_1}{2!} + \frac{a_2}{3!} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n!} + \ldots,$$

のある番号から先にあらわれる分子が、π の展開における対応する分子と一致するように集合 E を定義するのである。今度は、この集合は π に勝手な有理数 $\dfrac{p}{q}$ を加えた数の全体と一致する。

あるいは連分数展開を考えることもできよう。今度は、二つの連分数展開が n のある値より先は

$$a_n = b_{n+k}$$

となるという条件で集合を定める。ただし、a_n は π の連分数展開の n 番目の不完全商を表し、b_{n+k} はその集合の要素の連分数展開の $n+k$ 番目の不完全商を表し、k は各要素ごとに異なり、また、上が一致するような n の境界も同様である。この場合、その集合の要素を x とすると,

$$x = \frac{a\pi + b}{c\pi + d}$$

となる、ただし、a, b, c, d は

$$ad - bc = 1$$

を満たす整数である。

よく知られた別の到達可能数に π を置き換えることで、この例を変化させることができる。こうして、いとも簡単にたくさんの集合 E を定義することができる。

ここで次の定義を考えよう：集合 E は、ある位数から先の十進展開が一致するような数から形成されているという定義である。他に何も言わなけれ

ば、すなわち E の要素を一つ精確に与えるのでなければ、この集合は定義されていない。上の定義は、かなり広い集合の族を定義しているということができ、その族には π のような与えられた数から定義される集合すべてが含まれる。明らかに、この集合の一つ E を定義するただ一つの方法はまさに、この集合の要素を一つ与えることである。というのは十進展開の漸近的挙動を精確に定義できたとたん、数が一つ定義されてしまうからである。たとえば、小数点以下に、あるいは自然数、あるいは素数、あるいは平方数を自然な順序に書いていくような場合である。いずれの場合にも精確に一つの数が定まる。残念ながら、定義以外に、この数については何も知ることができないが、定義ができていることは確かである。

以上より、十進記法に関して漸近的に定義される集合 E の種類はかなり広いものだが、そこには、私達がいまも将来も知り得ない数が最も多いということができる。その数は絶対的に到達不能である。その理由は、数の無限列を与えることは、(たとえば π の十進小数展開の場合のように) 各数を順に計算していくことを可能にする規則がなければ不可能だからである。しかし、どのような規則ももたない無限数列の方が圧倒的に多く、言い換えれば、ほとんどすべての無理数は到達不能なのである。それは集合 E についても同様である。次の章では、Zermelo の公理を大胆に用いることで、これらの到達不能集合について推論でき、それを用いて、到達が困難な度合いがもっと大きい集合を構成できる、という立場から得られる結論のいくつかを調べることにする。

Chapter 9

集合Z

9.1　Zermelo の公理

ある集合を定義したり調べたりするときに Zermelo の公理が必要となるとき、その集合を集合 Z と呼ぶことにしよう。この集合 Z について考察するには、まず、この公理はどういうものか、また、それは、数学という学問を実際に展開する際にどのような位置を占めているかを簡単に思い起こすことが必要である。

この公理に Zermelo が想到したのは、George Cantor が提起し、大多数の数学者が解決不能と考えた問題を解くことを意図してのことであった。その問題というのは、連続体を順序つけることは可能かという問題、すなわち、連続体の点全体を前後に並べ、各実数にはその直後にある実数が対応し、さらに、各項の次には直後の実数が並ぶような実数の列があれば、その列には直後の実数がある、というようにできるか、という問題である。この問題を解決するために、Zermelo が提唱した公理は、“集合を任意に与えたとき、その部分集合のいずれからも一つの特定の要素を選ぶことが可能である” というもので、われわれはこれを仮説と呼ぶことにする。

この仮説を巡る議論[1]において、ある数学者達はそれを認め、他の数学者達はそれを批判したのであったが、この議論をここで思い出すことはしないことにする。しかしながら、上の議論において私はこの仮説を批判したが、矛盾が生じない限りこの仮説を使って恣意的定義をして種々の結論を引き出

[1] これについては、特に、Hadamard,Lebesgue,Baire　と私の「集合論をめぐる 5 書簡」をみていただきたい。これは、拙書「関数論講義」に再掲してある。

す数学者の権利を私は否定できないと強調したということ（引用した本を見よ）は指摘しておきたい。しかしながら、多くの数学者、特に Sierpinski とその弟子達は、Zermelo の仮説から多くの数多くの論理的帰結を引き出し数学の一分野を形成するに到っていることは疑いない。この分野は分野 Z と呼んでよかろう。さらに、これらの数学者は、得られた結果の中で、どれが分野 Z に属し、それが属さないか、ということを識別することにも注意を払っている。彼らにそれ以上のことを要求することはできないが、数学の諸分野との関係における分野 Z がもつ重要度については、意見の相違があっても許されることである。

何世紀にもわたってユークリッドの仮説と呼ばれた言明が、多くの幾何学的定理の中で一定の部分を占めてきた事実はユークリッドの栄光の中で最も大きなものであることは否めない。この仮説を証明しようという試みが繰り返され全て失敗に終わった後に、ある日、この仮説を証明することは不可能であることが示され、それと矛盾する公理を基盤に、ある意味ではユークリッド幾何学とよく似た、別種の幾何学を構築できることがわかり、しかも、その幾何学は、論理的には全く整合的であるという点で、ユークリッド幾何学と同じ価値を持つものであった。さらに、この幾何学は多くの数学者によって用いられ、特に、ポアンカレがフックス関数の研究で活用したことが有名である。しかし、この幾何学を使ってその重要性を特に増したのは相対論であった。

しかしながら疑いなく、ユークリッド幾何学は今も大きな位置を保っており、予見可能な未来においても長く、その位置を保つであろう。初等中等学校で教えられているのはユークリッド幾何学だけであり、また、実際への応用を念頭に数学を学ぶ者に不可欠なものもユークリッド幾何学だけである。高等数学においても、ユークリッド幾何学はそれだけで、他の種々の幾何学すべてよりも重要な位置を占めている。ユークリッド幾何学が占める位置は、ある点で、（quaternion や ideal 等々の）数の種々の拡大概念の中で複素数が占める位置にたとえることができよう。

前世紀の終わりから今世紀の初め頃に、一般的に、公理という言葉が仮説という言葉にとって変わられるようになったが、仮説という言葉のもつより謙虚な語感は世紀を超えて保たれた。これをもたらしたのは、特にヒルベルトの業績であり、また、彼に続いて公理的方法を展開した人々である。この方法は、しばしば言葉では明示的には表明されていない知識も含め、直観的に明らかであろうとなかろうと、私達の知識全体の表 (table rase) を作るものであり、無から出発して先験的に設定した定義と公理に基づいて学問を構築するのである。公理は定義した存在の間の関係を表現するもので、その

関係には恣意的な名前がつけられる。こうして、点と呼ばれる物と、直線と呼ばれる別の物を定義し、これらの物のあいだに、点が線の上にある、あるいは、線が点を通る、と言って表現する関係を導入するのである。

この場合は単に点と線が出合うという言い方をすると決めてもよい。この対称的な用語により、極変換により導かれる双対性原理は直観的に明らかなものと見える可能性があるだろう。現代代数学の方法は、公理的方法の体系的適用をもっと徹底して行うものとなっている。

これらの業績のおもしろさと重要性とを見失わないよう、次のことに注目しておこう。それは、その中で最も現実からかけはなれたようなものであっても、多かれ少なかれ原点はこの現実の中にあるということである。ヒルベルトが点と呼ばれる物と直線と呼ばれる物に想到し、これらの物の間に結合の関係を与える、というようなことは、もしもヒルベルト以前に次のようなことがなければ決してありえなかったであろう。人類はまず直線や点と似た物について大雑把な理解をし、その後で、数学者は抽象化と一般化に基づく仕事を通して、点と直線をユークリッド的に定義し、その定義から無数の帰結を導き、１９世紀には幾何学という重要な学問の殿堂を構築することに成功したのである。

この幾何学は、道を開いたことで壮大な発見を可能にした。これは特に天文学と力学において著しい。ケプラーが惑星運動の法則を言明しニュートンが万有引力の法則を言明できたのは円錐曲線論のおかげである。力学、幾何学、微分法の進歩は物理科学の進歩を可能にし、これらの進歩は文明を全く変容させた。

しかしながら、数学者は抽象的な研究を続け実用的応用への関心なしに真実をただ単に追い求め続けた。人間の知性と自然界の法則の間の神秘的な調和により、しばしば、最も抽象的で見かけは現実から最もかけはなれた研究が、壮大な実用的発見の源となることが起きた。こうして、電磁波はマックスウェルとヘルツの業績に原点があるが、彼等の業績は複素関数論に基づいており、この理論は１９世紀の初頭に多くの数学者によって発展されたもので、その中でも特にコーシーの名前を引用しなければなるまい。

最近では、かなり抽象的に見えた絶対微分学が物理学における相対論の不可欠な道具であることが明らかになった。

従って、現実的応用をもちそうもないので無用であるいって、ある種の研究を数学者に禁じようというのは賢明なことではない。専門化が必要となる場合は残念ながら余りに多いが、数学の諸専門分野の間には密接な関係が予想外の結果を産むことがあ、たとえば、素数についての数論的研究はたぶ

ん解析学の進歩をもたらす可能性があり、関数論は物理学者によって利用されるかもしれない。

したがって、数学の諸分野の意義の比較について意見を述べるには相当慎重でなければならない。しかしながら、非ユークリッド幾何学は、確かにそれ自身に面白さがあり、さらに相対論によって現実的現象と結びつけられているのだが、それでも、ユークリッド幾何学に比べれば重要度は相当に低いままであると私には思われるのである。それと同様のことが分野 Z についていえるが、その理由はもっと明確なものである。というのは、その分野において研究対象になると主張されている数学的存在は、どのような方法によっても具体的な存在とは結びつかないからである。実際、到達不能な無限個の数の中から、確定した数を一つ選べると主張することは、その数は今も将来も決して他の数を区別ができないという意味で、空虚な操作ができると主張していることになるからである。とはいえ、仮説としてこの数が選ばれて明確に区別でき、その仮説から種々の帰結を導こうとすることはできるのだが、結論はいずれも仮説自身と同じく現実からはかけ離れたものになろう。

9.2　集合 Z の類

さて、これから、Zermelo の仮説を前提として、それから集合 Z と呼ぶ特別な類を定義するが、これは、これまでに調べてきた可算個の点の集合に付随するものとなる。

ある可算集合に対し、ある変換の群が存在し、その集合の点を自分自身に移し、その集合のどの点も別の任意の点に移す変換がある場合に、自身に変換可能である、という。この定義では、まず、言及されている変換が、その集合の台をそれ自身に移すことが前提となっている。たとえば台が円か球面の場合である。

自身に変換可能な可算集合の中で、簡単に定義できるものとして、円周上の集合で、O を円の原点とするとき弧 OM の長さが有理数であるような M のなすものをあげることができる。ただし、円周の長さを 1 とする。球面上では、第３８節で調べた点 MR の集合を挙げることができる。もしも M_1, M_2 がこの集合の点ならば、M_1 と M_2 を一致させる変換は、M_1, M_2 と球の中心で定まる平面と直交する直径を軸とする回転である。これらの回転は、まさに、第３８節で調べた回転である。もしも、M_1 と M_2 が点 O と直線をなす場合、すなわち、ある直径の両端である場合は、一方を他方に移す無限個の

回転の中から回転を選ぶために、M を M_1 と M_2 に移す回転

$$MR_1 = M_1, \quad MR_2 = M_2;$$

を書くと、これから

$$M_1 = M_2 R_2^{-1} R_1$$

を得、直接に積 $R_2^{-1} R_1$ を計算すれば回転を得る。

可算集合の台が線分のときは、この線分を自分自身に移す運動は（自分を自分自身に写す反転を除くと）ない。しかし、0-1 区間を含む直線上を平行移動させて得られる各点を整数だけずらして 0-1 区間の上の点と同一視すると約束すると決めることができる。言い換えると、点 1.345 は点 0.345 と同一視させるのである。このように約束すると、座標が有理数である点、あるいは、座標が有限十進小数である点のなす集合は、自身に変換可能な集合の 2 つの例となる。

すでに確認したように、直線の場合には、与えられた集合のすべての要素に、決まった数を加えることで、新しい可算集合で自身に変換可能なものを得ることができる。もしも与えられた集合を D と書くと、新しい集合は、たとえば、$D + \pi$ と表すことができる。球面の場合は、問題は少し違った形になる。まず、以前に定義した集合は $D(M)$ と表すことができる。というのは、出発点として球面上から選んだ点 M は (回転 φ, ψ を定める 2 つの直径の両端 AA',BB' のいずれでもないという条件を満たすこと以外は) 任意だったからである。x が E に属さない任意の点であったのと同じように、$D(M)$ に属さない任意の点 M' をとると、別の集合 $D(M')$ を同じように定義できる。

上の条件を満たす、すなわち、すでに構成された集合に属さない x や M' を得るごとに、新しい集合 $D + x$ や $D(M')$ を簡単に作れる。しかし、このようなやり方では高々可算個の集合しか作ることができないので連続体の点を埋め尽くすには程遠い。上の操作を先に進め、直線や球面のすべての点を尽くすのに必要な連続体の濃度を持つ集合族を定めるには、選択公理、あるいは、この言葉の方が好ましいというのであれば、仮説 Z、に頼らざるを得ない。そうすると、直線上の基本区間のすべての点、あるいは、球面上の（直径 AA',BB' の端点を除く）すべての点を含むような、無数の集合 D を「定義」することができる。直線の場合は、これらの集合 D は、平行移動で互いに重ね合わせることができるので、同じであると考えることができる。しかし、この様子は平行移動が可換であるという事実に依存している。回転の場合にはこの事実は成り立たないので、球面では、上と同様の様子は見られないのである。

次の節では、新しい選択の集合を利用し、集合 D から、集合 ZD と呼ぶ、新しい集合を定義するが、これはかなり興味ある性質を持つことがわかる。

9.3　集合 ZD の定義

与えられた領域（たとえば線分や球面）に先ほど定義した集合 D の集合が与えられたとし、それぞれから特定の点 M を選ぼう。点 M 全体がなす集合 ZD をこれから調べることにしよう。しかし、調べる始める前に指摘しておきたいことは、この集合について何かを知りたいときこの定義は全く役にたたない、という点である。実際、すでに注意したように、集合 D の大部分については何も具体的に知ることができない。これらの集合については、一つ一つを区別はできず全体をひとまとめにしてしか知ることはできないのである。それらの中で、本当に定義できる集合については、与えられた無理数（や球面では与えられた点）から定義したが、その場合は、この数（や点）を特定の要素として選ぶことができる。しかし、実際には要素を一つとして知ることができないような集合 D の族は非可算無限なので、その一つの点をそれぞれから選ぶ困難は解決できるようなものではないと思われる。Zermelo が推奨する信仰に基づく行為としてこの選択を行うのだ、としか言えないのである。

それはそうとして、上のようにして各 D から一つだけ点を選んで形成された無限集合を ZD と書くことにしよう。この集合は明らかに、D の集合と同じように、連続体の濃度を持つ。しかし、もっと重要なことは、D を不変にする回転の集合を ZD に適用すると、ZD と等しい集合 $Z'D'$ が可算個得られることである。ここで、「等しい」というのは変換で一方を他方に移せるからである。さらに、区間の（あるいは球面の）すべての点は、$Z'D'$ の一つ（あるいは ZD）に含まれる。これらの変換（平行移動あるいは回転）のそれぞれは、M を、M と同じ D に属する点 M' に移す。使える変換をすべて適用すると、すべての D のすべての要素、すなわち、基本領域（線分あるいは球面）のすべての点、を得る。

線分あるいは球面の点を加算個の集合に分割し、しかも、各集合がお互いに同じにできる、という結果は注目すべき結果である。実際、直線上の線分や球面を同じ n 個の部分に分けることは容易だが、n が限りなく増えていくとき、これらの部分はゼロに近づき、しかも消滅はしない。一方、直線上に無数の線分（たとえば、座標 $\dfrac{1}{n}$ で決まる点を端点とするもの）を定義でき

るが、これらの線分は n が無限に近づくゼロに近づくので、互いに同じではない。

9.4 集合 ZD の考察

可算集合について先に行った考察を使うと ZD の考察はかなり容易になる。実際、直線の場合は、各集合 $Z'D'$ にはある有理数 x が対応し、$Z'D'$ の要素は ZD の要素に x を加えることで得られる。球面の場合は、各回転 R は ZD を別の集合 $Z'D'$ に移す。この集合 $Z'D'$ は、定義により ZD と等しく、また、ZD と同じような仕方で形成されている。実際、ZD の点 M はいずれも唯一つの D に含まれていて回転 R によって同じ D の点 MR に移されるが、$Z'D'$ の点 M' についても同様で、いずれも唯一つの D' に含まれるのである。

以上のことから、集合 ZD についての考察を、D の中の一つの点のなる可算集合についての考察と関連させることができる。実際、集合 ZD と D の点の間には一対一の対応がある。D の二点に対応する二つの集合 ZD は共通点を持たないので、この二集合 ZD の合併集合は、D の二点のなす集合からあいまいさなしに定義されれる。

最初に精確に述べやすい直線の場合を考えよう。任意の n について、0-1 区間は n 個の等しい区間にわけ、区間同士が D の要素を不変にする変換で互いに重ね合うされるようにすることができる。同じ区間 S の点に対応する ZD 全体の合併集合を ZDS と書くことにする。上のような区間 S の２つ S_1,S_2 を重ね合わせる平行移動は、ZDS_1 を ZDS_2 に重ね合わせる。こうして、n 個の区間 S から n 個の集合 ZDS_1,ZDS_2,. . .,ZDS_n が定義され、これら互いに等しく、合併は 0-1 区間全体となる。従って、点が ZDS_i の一つに属する確率を $\dfrac{1}{n}$ でないとするのは無理があるように見える。

しかし、第３７節と同様の議論から次の結論を得る。基本区間内のどの区間が与えられても、この区間 λ の有理点に対応する集合 ZD の合併を $ZD\lambda$ と表すと、その確率は λ となる。しかし、そうすると、矛盾に会う。というのは、第３７節でわかったように、有理数の集合は区間 λ の集合で覆われ、しかも、その区間の長さの和はいくらでも小さくできるからである。

この逆理への対処は、可算集合の場合と類似のものとなろう。可算集合の場合は、可算集合の要素すべてに同じ確率を与えることはできない、という制約があると考えるに到ったのである。従って、この制約を集合 ZD の族の

なす可算集合に適用しなければならない。しかし、そうすると、重ね合わされる図形は等しいというユークリッド同等原理に矛盾する。有理数のなす可算集合の場合は、測度がゼロだったのでこの原理は働かなかったのであるが、区間を覆う可算個の集合 ZD を構成したことによって、問題の位置づけを変えてしまったことになる。実際、区間 S の有理点全体に対応する集合 ZDS_1 は、それと同等の n 個の集合が基本区間全体を覆うので、広がりがないと見ることはできないのである。

集合 ZD の構成は Zermelo の公理を必要としたことから得られる結論は、Zermelo の公理とユークリッドの公理のいずれかを選ばなければならないということである。後者によれば、重ねあわすことができる図形は同じである、すなわち、あらゆる視点からも同等で、特に同じ確率を持つのである。この２公理を同時に使うと実際に矛盾してしまうのである。

以上のような事情の下では、ユークリッドの同等公理のほうを私は好むが、Zermelo の公理の方を他の方々が好む権利を批判はしない。次に考察する Haussdorff の逆理は、第３８節で導入した回転の集合 A, B, C に関連している。

9.5 Hausdorff の逆理

球面上の集合 ZD を考えよう。これは、第３８節で定義した回転を球面上の勝手な点 M に作用させて得られる球面上の集合 D によって定義されるものであった。これらの回転は、３つの類 A, B, C に分類されたが、記号を煩雑にしないために、A, B, C の類に属する回転を ZD に作用させてできる集合も、それぞれ、A, B, C と表すことにする[2]。そうすると和集合 $A + B + C$ は球面全体を覆い、関係

$$(1) \qquad \begin{cases} A\varphi &= B + C, \\ A\psi &= B, \\ B\psi &= C; \end{cases}$$

が成り立ち、これより、点が球面から選ばれる確率全体を１とするとき、A から選ばれる確率は $\dfrac{1}{2}$ でありか $\dfrac{1}{3}$ となる。これがハウスドルフの逆理である。

しかし、容易に、もっと逆説的な度合いが大きい帰結を引き出すこともできる。もっとも、数学者にとっては間違いの程度というようなものはなく、

[2] [訳注] $\bigcup_{R\in A} ZDR$ を A と書くということ

間違った等式が一つでもあれば、それから他の間違った等式すべてが導かれるので、逆説性の度合いが大きい、などという物言いはおかしいのではあるが、その点は気にしないでおこう。

実際、(1) から、次が導かれる.

$$
(2) \qquad \begin{cases} A\varphi\psi &= B\psi + C\psi = C + A, \\ A\varphi\psi\varphi\psi &= A\varphi\psi + C\varphi\psi = A + C + C\varphi\psi, \\ A(\varphi\psi)^3 &= A + C + C\varphi\psi + C(\varphi\psi)^2, \\ A(\varphi\psi)^n &= A + C + C\varphi\psi + C(\varphi\psi)^2 + \ldots + C(\varphi\psi)^{n-1}. \end{cases}
$$

ある軸 CC' の周りの、ある角度 β の回転を次々と施すと、集合 A は次第に大きくなるのである。このことから予想されるように、逆回転は、集合 A を小さくしていく。実際、

$$
(3) \qquad A\psi\varphi = B\varphi
$$

であるが、(1) より

$$
(4) \qquad (B + C)\varphi = A
$$

なので、$B\varphi$ は A の一部であることがわかる。これを A_1 と書くと

$$
(5) \qquad A\psi\varphi = A_1
$$

となる。同様にして

$$
A(\psi\varphi)^2 = A_1(\psi\varphi) = A_2,
$$

ただし、A_2 は A_1 の一部である。以下同様に続けることができる。

確認できることは、A の項、すなわち、補正項 $(\varphi\psi^2)^n$ に項 $(\psi\varphi)^n$ を加えたものの全体は変換 $\varphi\psi$ で不変な集合だが、変換 $\psi\varphi$ でも不変となる[3]。しかし、他の A の項については次のことがいえる。第３８節でしたように回転 R を位数で分類すると、変換 $\varphi\psi$ は A にある回転 R のうちのいくつかについては位数を減少させ、変換 $\psi\varphi$ は逆にその位数を増大させる。

実際、回転 $(\varphi\psi^2)^n$ と $(\psi\varphi)^n$（に単位回転を加えなければならないが）は A に含まれ、この集合は $\psi\varphi$ をかけても、$\varphi\psi^2$ をかけても、そして当然ながら、これらのべきをかけても、不変である。この集合の確率を p と表すとき、すぐ示せることは、積 $A(\psi\varphi)^n$ の確率は n が限りなく増大するときに p に近

[3] [訳注] これは $(\varphi\psi^2)$ で生成される部分群である。$\varphi\psi$ は $(\varphi\psi^2)$ の逆元であることに注意。

づくことである。最初に、$(\varphi\psi)^n$ を $(\varphi\psi)^{n-1}$ に移す変換 $\psi^2\varphi$ を作用させ、そのあと、変換 $(\psi\varphi)^n$ を作用させると、すなわち、集合 $A\psi^2\varphi(\psi\varphi)^n$、あるいは、こちらの方がよければ集合 $A(\psi^2\varphi)^n$ は、確率がゼロに近づく[4]。

可算集合上の確率論は Hausdorff の逆理についての簡単な説明を与える。その説明は、確率がすべて正で和が 1 という条件さえ成り立っていれば、個々の要素の確率には依存しない。なお上の条件から、要素に到達するのが困難になるにつれ、すなわち、その要素を定義するときの表記が複雑になるにつれ、確率はゼロに近づくということが帰結する。しかし、ユークリッド的に相互に等しい集合 ZD を要素とする可算集合が問題となっている場合は、これらの要素に違う確率を与えなければならないことはユークリッドの等値公理と矛盾する。この矛盾に、まさに Hausdorff の逆理は帰着するのである。

[4][訳注] この部分は意味が不明

Chapter 10

確率と測度

10.1 構成的測度

集合の測度についての一般論はこのシリーズの種々の巻で扱われているので、この本で取り上げるつもりはない。ここでは、いくつかの事実を簡単に想起し、それと、各章で得られた結果との関係を調べたい。

拙書「関数論講義」の第一版で説明した、測度の構成的理論の骨子は次の通りである。まず単純な要素、すなわち区間について、それが開区間か閉区間か区別せずに測度を与えることにし、長さの単位を適当に決めておいて、区間の測度はその区間の長さとする。測度がわかっているこれらの区間を使って、徐々に複雑になっていく集合の測度を、次のような簡単な規則で順に定義していくことができる。

a. 測度がわかっている有限個あるいは可算無限個の集合の合併の測度は、これらの集合が共通点を持たない場合は（ただし、区間の端点については例外とする）、各集合の測度の和とする。

b. 集合 E_2 の点が集合 E_1 に属していて、E_1, E_2 のいずれも測度がすでに定義されているときは、E_1 に属して E_2 に属さない要素の集合 $E_1 \setminus E_2$ の測度は E_1 の測度と E_2 の測度の差となる。

このようにして測度が定義できる集合を可測集合と私は呼んだ。Lebesgue によりそれらを B 可測集合と呼ばれ、この呼称が広く採用された。

この本で私は第三のポイントを指摘した：

c. 集合 E_2 の点が集合 E_1 に含まれ、集合 E_1 が可測で測度がゼロのとき、集合 E_2 は a,b の意味で可測かどうかにかかわらず測度はゼロ（あるいは測度零）であるとする。

私が学位論文で証明した定理により規約 a,b,c は矛盾しないことがわかる。なお、上の定理は、Heine-Borel の定理、あるいは、Borel-Lebesgue の定理を呼ばれることがある。

10.2 公理的測度

Lebesgue は、積分についての著名な仕事に関連して、測度論に公理的基盤を与えた。

次の条件が満たされるとき、集合族の各要素に対して定義された数は測度を定義するという。

a. 任意に選んだ区間を一つ決め、その測度を 1 とする。

b. 共通点を持たない、有限個、あるいは可算無限個の集合の和集合の測度は、それぞれの集合の測度の和である。

c. 集合 E_1 のすべての点が区間 E に含まれるとき、集合 $E_2 = E - E_1$ の測度は、それぞれの測度の差となる。

d. 重ね合わせられるという意味で等しい集合の測度は等しい。

この公理により Lebesgue は、B 可測集合より広いクラスの集合に測度を定義したが、このクラスの集合は L 可測集合と呼ばれている。これらの集合の全体の濃度は連続体の濃度より大きい。一方、これらの集合は、B 可測集合に、それと B 可測ではないが測度零の集合の合併集合を合わせることでも得られる。

ある種の集合について、公理を見たるような数を定義できないとき、その種の集合は可測不能と呼ぶ。

10.3 測度と確率

すでに見てきたように、連続的確率の普通の定義はB測度とL測度と同等の結果を与えるので、測度と確率を混同してもよさそうである。この指摘は、測度の一つの一般化がもたらすが、この一般化は、x が 0 から 1 まで増大するときに 0 から 1 まで増大する関数 y で x を置き換えてえら得る連続的確率の一般化とある面で平行している。もしもこの関数 $f(y)$ が可微分ならば、

$$dx = f'(y)dy$$

であり、x が x と $x + dx$ の間にある確率が dx に比例している場合は、y が y と $y+dy$ の間にある確率は $f'(y)dy$ に比例するが、これと平行して測度を修正して、ユークリッド的等値性公理dを、もう少し一般的等値性に置き直すことができる。この等値概念には恣意的な関数 $f(y)$（あるいはその微分 $f'(y)$）があり、

$$\int_a^b dx = \int_c^d dx$$

を満たす区間がユークリッド的に等値であるという定義に対応して、一般には

$$\int_\alpha^\beta f'(y)dy = \int_\gamma^\delta f'(y)dy$$

のときに等値であるとなる。

この一般化は、与えられたある集合の内部に確率あるいは測度を定義しようとするときにとても便利である。ただ一つだけ例を挙げるよう。この例では、0 と 1 の間の x をカントールの三進集合に以下のように対応させる：まず x を二進法で

$$(E_1) \qquad x = 0.001100111010\ldots,$$

と表し、この表示における数字 1 を 2 に置き直したものを三進展開とみなした数

$$(E_2) \qquad y = 0.002200222020\ldots.$$

に対応させるのである。もしも、（B測度はゼロの）三進集合に勝手に測度 1 を割り当てると、点 y により形成される集合 E_2 のいずれも y に対応する x が形成する集合 E_1 と同じ測度を持つことになる、ただし、集合 E_1 の測度をこれまでの節で定義したようにしたものとする。

測度と確率の間にある平行関係は、可算集合内の測度についての考察にも適用され、可算集合内の確率について行った考察より、この場合には、ユークリッド的同等公理 d は、どのような任意関数 $f(y)$ についての測度の公理[1]とも矛盾せざるを得ないことがわかるのである。

従って、もしもある集合 E の測度を、第４９節と第５０節の定義に従って与えるか、あるいは恣意的な規約で、全体の測度が 1 となるように与え、さらに、この集合 E が互いに共通部分がないがユークリッド的には同等であるような、可算無限個の集合 E_n の合併となっていているとすると、これらの集合に共通な測度 μ を与えることは、μ がゼロでもゼロでなくても、不可能である。というのは、もしも μ がゼロならば、E_n の合併の和の測度もゼロとなってしまうし、ゼロでないとすると E_n の合併集合の測度は無限になってしまう。これは、まさに、前章で考察した逆理にほかならない。

集合 E が、可算無限個の点で形成されているときは、当然ながら E に測度ゼロを与えることで逆理は解消するが、前章でやったように、公理 Z を用いて、可算無限集合の各要素 u_n に、集合 E_n を対応させ、集合の E_n の集合が、測度がゼロではない集合 E を与える場合は、逆理は解消できない。私達はここで二つの選択肢に直面することになる。一つは、ユークリッド的等値公理 d を放棄し、各集合 E_n に互いに異なる測度を自由に与え（あるいは、自由に与えた規則に従って決め）、その際に u_n の級数が収束し和が 1 になるということだけ気をつければよい、というやりかたである。もう一つの選択肢は、集合 E_n は可測ではないとし、この視点をとることを放棄することである。しかし、もしも後者を選ぶとしても、生じた諸困難は公理 Z を使用したことから引き起こされたのではないか、それを使用したことにより互いに重ね合わせることができる集合 E_n に異なる測度をかなり恣意的に与えることになってユークリッドの同等性公理と矛盾することになった、ということではないか、と問うても良いだろう。さらに、すでに指摘したように、数 u_n を勝手に選ぶといってもそれは収束級数をなすという条件が課せられているために、数 u_n をどういう順序に並べるとしても、その位数が限りなく大きくなるにつれゼロに近づく。従って、これらの数の選択がいかに恣意的になされたとしても、n が到達不能な数となるような集合 E_n に与えられる測度は無視できるほど小さいものとなる。この指摘こそ、この本のテーマに直接関連するものなのである。

[1][訳注] つまり公理 a,b,c で、公理 a を密度 $f(y)$ による長さとして修正したもの

10.4 選択と確率

最後の問いを検討することが残されているが、私はそれを指摘するにとどめ、解決する労は公理 Z を認める人たちに委ねたい。

この問いは、公理 Z によって行われる選択の確率について語ることはできるか、というものである。もう少し正確にいうと、もしも選択が集合 E において行われるとするとき、この選択が、E のある部分集合 E_1 に含まれる確率について語ることができるであろうか、という問いである。選択が実効的なものであれば、この問い対し疑いもなく肯定的に答えることができるに違いない。しかし、まさに、実効的な選択を与えることができないからこそ、私は公理 Z を批判するのである。しかし、この公理を認める人たちが、公理から導かれる選択を、どういう基準で実効的である、あるいは現実的である、とみなすのかは私にはわからない。そして、ここは、そのテーマについての論争を再開すべき場ではない。

一つのことだけ私には確かなことと思われる。それは、ある集合における選択がすべて確率を持つと仮定することから帰結することは、たとえ計算方法はないとしても、すべての集合に測度を与えることができ、さらに、ユークリッドの同等公理に反して、各集合 E_n には、ある程度の制約はあるものの、異なる測度が勝手に与えられることになる、ということである。こういったことは、何ら矛盾なく実現できるように見える。

到達不能性についての二つの注意

D. Dugué

I.　集合の要素を到達可能なものと到達不能なものに分けることで、推論を到達可能なものに限ることにより、しばしば証明を簡明なものにすることが可能である。面白いことに、たとえば、増大度が到達可能な関数に限定することで、Picard-Borel の定理が、対数関数だけを使って Liouville の定理のある拡張によって証明でき、modular 関数や、Borel 氏による増大度に関する不等式を使わなくてもよい。この" 擬証明" は、Picard 氏の証明とまさに同じタイプのものである。

そこで、次の定理を証明しよう：

> 全平面で有理型の関数 $\varphi(z)$ は、2 つの値を除いて、すべての値を無限回とる。

もしも 2 つの除外値があるならば、それを正則変換で無限とゼロにしておくと、第三の除外値がないこと、すなわち、全平面で正則な関数がゼロにはならないとき、ゼロ以外の値はいずれも無限回とることを示せばよい。

もしもゼロと無限が例外値ならば、$\log\varphi(z)$ は一価で平面上到る所で正則である。従って正則関数 $E(z)$ により $\varphi(z) = e^{E(z)}$ と書ける。

a. $\varphi(z)$ が位数 α の場合。このとき $\mathcal{R}[E(z)] < C|z|^{\alpha}$ である。Liouville の定理を精密にした Hadamard 氏の定理により、$E(z)$ は多項式 $P(z)$ である。したがって $e^{P(z)} = \rho e^{i\theta}$ が $\rho \neq 0$ のとき無数の解を持てばよい。これは

$$P(z) = \log\rho + i(\theta + 2k\pi)$$

(整数 k は正か負かゼロ) を解けばよいが、これは、Liouville の定理の帰結である d'Alembert のｐ定理により可能である。

b. $\varphi(z)$ の位数が無限の場合。証明は $|\varphi(z)| < e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{C|z|^{\alpha}}}}}}}}$ の場合も可能である、ただし、べきは n 個重なっているとする。定理が $n-1$ の場合に成り立っているとして、n の場合に示せばよい。

そこで、

$$|\varphi(z)| < e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{C|z|^{\alpha}}}}}}}} \qquad (n\text{ 個のべき})$$

で、仮定より $\varphi(z)$ は $e^{E(z)}$ である。そうすると

$$|e^{E(z)}| < e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{C|z|^\alpha}}}}}}} \qquad (n\text{ 個のべき})$$

で

$$|\mathcal{R}(E(z))| < e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{C|z|^\alpha}}}}}}} \qquad (n-1\text{ 個のべき})$$

となる。$|z|=r$ での $\mathcal{R}(E(z))$ の最大値を $A(r)$ と書き、$\max|E(z)|$ の最大値を $M(r)$ と書くと、Borel 氏の不等式より、

$$M(r) \leq 2A(2r) + 3|E(0)|$$

である。従って $|z|=r$ のとき、

$$|E(z)| < 2e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{2^\alpha C|z|^\alpha}}}}}}} + 3|E(0)| < e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{C'|z|^\alpha}}}}}}} \qquad [n-1\text{ 個のべきが重なっている}]$$

となる。定理は $(n-1)$ については成立しているので（そして無限は整関数については除外値なので）、$E(z)$ は、高々一つの値を除くどの値も無限回とる。数の組 ρ, θ について、方程式 $e^{E(z)} = \rho e^{i\theta} (\rho \neq 0)$ は、無限個の方程式

$$E(z) = \log\rho + i(\theta + 2k\pi)$$

と同値である。従って、ρ がゼロでないどの数であっても、無限個の解を持つ [方程式 $E(z) = \log\rho + i(\theta + 2k\pi)$ 全体の中で、無限個の解を持たないものは高々一つである]。

従って、上の証明では定理の主張が示せないような関数は、$e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{|z|}}}}}$ （べきの数は任意）という形の関数のいずれよりも急速に増大する。Dubois-Reymond の定理により、これらの関数のいずれよりも早く増大する関数があり、Henri Poincaré の定理により、それよりさらに速く増大する整関数が存在する。簡単にわかるように、この関数は到達不能な大きさを持つ。

実際、その大きさは、実整数 z だけべきが重なる $e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}$ である。$z=1$ のとき、これは e であり、$z=2$ のとき 5 より大きく、$z=3$ のとき 76.5 より大きく、$z=4$ のとき 30 桁の数より大きく、$z=5$ のときは、10^{30} 桁の数よりも大きい。しかし、ここで紹介した証明で満足できるわけではなく、数学から到達不能な要素を排除しないためには新しい議論が必要であろう。

II. 私の記憶に間違いがなければ、一時間に走ることができる距離の m 単位の最大値は 19.339 km である。年々、そして未来にわたって、改良されていくのは間違いのないことである。しかし、新記録も決して、たとえば一時間に 30km を超えることはないと断定はできる。従って、過去現在未来において人間が一時間に走れる距離の集合は有限の上限を持つ。この数は明確に定義できていているが、永遠に到達不能のままである。というのは、その数の値を正確にするには、この集合の無限個の要素を知らなければならないが、それは不可能だからである。こういった障害はあるものの、この数の存在を否定することもできないように思えるし、また、この数について話をしている人が、自分たちは本当に同じ数について話しをしているか心配になることもないように見える。この数が存在することは、関数方程式の解が (Weierstrass-Bolzano の定理の帰結である)Arzela の定理によって存在するのとまさに同じ論理的必然性がある。この二つの状況が全く同じであることから、後者の場合にも、解がいまのところ構成できないという状況が未来永劫にわたって続くことはないのだろうかと問うことは許されるだろう。

Borel 氏は、数の表記法に関する章で、与えられたアルゴリズムにより十進展開が簡単に求められる数（たとえば、n 番目の不完全商 a_n が $a_n = n^2$ で与えられる数）でありながら、残念なことに他の性質が全く知られていないような数について言及している。言い換えると、言明中にその数が現れるような定理が現在のところ存在しないのである。この考え方の文脈では、そのような定理が決して存在しないような数を構想することは馬鹿げたことではないように私には思われる。

前文の言い方には曖昧さの余地があることを認めねばならないが、他の言い方が可能とは思えない。しかし、先に進む前に、可能な限り意味を明確にしたい。実のところ、与えられた数について一つの定理は常に存在する。それは、出発点である仮定を結論として繰り返すだけの定理である。数学的結果はすべて、本質的には、恒等原理が、長短の思考過程を経て、別の形に表現されたものにすぎない。「指摘するに値する」定理として表現しようとするのは、その思考過程がかなり長い場合だけである。その価値判断は、もちろん主観的なものである。この点を留保した上で、指摘するに値するほど恒等原理から離れている定理が決して存在しない数、という言い方をすべきであろう。

もちろん、証明の実質は恒等原理から出発することではない。逆に、そこに到る過程そのものが証明の実質とも言える。恒等式から出発するのではなく、そこに到達するのである。多かれ少なかれ意識的な推論に導かれて直観により、数学者は、自分が取り組む問題の解決は、ある形をとり他の形は

とらないように見える。有限回の推論により、その問題は恒等原理に帰着できるか、あるいは、先駆者が恒等原理に結びつけた命題に帰着することになる。ときには、研究の出発点において考えていたことと矛盾することが示されることもある。

もしも、定義された十進数で、指摘するに値する定理の中には決して含まれないような数があるのであれば、逆に、そういった定理の中に現れる数で、有限回の操作では十進展開が決して得られないようなものがないかどうかを問うこともできるだろう。私は最近、Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liége の論文[2]において、数学的性質によって明確に定義されながら、その数値を決して求められないようなものがあることを指摘し、到達不能性についてのこのような側面について注意を喚起した。

この不可能性は、先ほど述べた、スポーツの領域での不可能性と、根底においては同じ性格のものである。この展開不能な数は、要素を一つ一つ順にしか知ることができないかもしれない無限集合の集積点なのである。しかし、数学の場合は「できないかもしれない」のであるが、スポーツの場合は「確かにできない」、という違いがある。

[2] “L'infini en logique et les éléments définis et non calculables” (論理における無限と、定義可能で計算不能な要素), Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liége, 1950,n^o 11.