複数の有限概念を基盤とする数学

辻下 徹

立命館大学理工学部

2009.3.16

1 Sorites 的同値関係

2009.3.16

定義

同値関係 $\approx$ が Sorites 的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての a, b について $a \approx {}^*b$

ただし $a \approx {}^*b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a = b$ または $a \approx {}^\exists x_1, x_1 \approx {}^\exists x_2, \cdots, {}^\exists x_n \approx b$

命題 (Sorites Pararox)

自明でない同値関係 $\approx$ が Sorites 的ならば

$$x_1 \approx x_2, x_2 \approx x_3, \cdots x_{n-1} \approx x_n$$

だが $x_1 \approx x_n$ ではないような列がある.

定義

$(X, \approx)$ が連続体 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\approx$ が Sorites 的同値関係

しかし、現代数学では $\approx^* = \approx$

2 巨大数公理

定義

$a \ll b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ a から b に到達できない.

i.e. a から具体的に定められる数は b より小さい. 例えば $2^{2^{2^a}} < b$.

巨大数公理

どの数 x に対しても $x \ll n$ を満たす数 n が存在.

定義

$1 \ll n$ のとき n を巨大数といい、そうでないものを具体的数という.

系

巨大数が存在する。

3

稠密性公理

2009.3.16

稠密性

$a \ll b$ ならば $a \ll c \ll b$ となる c がある。

系

巨大数 a と具体的な t に対し、次のような列がある。

$$a_t \ll a_{t-1} \ll \cdots \ll a_1 \ll a \ll b_1 \ll b_2 \ll \cdots \ll b_t$$

4

補足：識別不能列

2009.3.16

定義

列 $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ が識別不能列
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ どの論理式 R についても、
$i_1 < i_2 < \cdots < i_t, j_1 < j_2 < \cdots < j_t$ ならば

$$R(i_1, i_2, \cdots, i_t) \Leftrightarrow R(j_1, j_2, \cdots, j_t)$$

命題

識別不能列は $x_1 \ll x_2 \ll \cdots \ll x_k \ll \cdots$ を満たす

「現代数学」の定理

1. ペアノの公理系のモデルで、識別不能列を含むものがある。
2. 証明：コンパクト性定理+Ramsey の定理

5 溢出公理 2009.3.16

溢出公理

$\forall^{\mathrm{concrete}} x\ P(x)$ ならば $\exists^{\mathrm{huge}} x\ P(x)$ ただし

- $P(x)$ は「巨大」を使わない論理式
- $P(x)$ には「巨大数」がパラメータとして入ってもよい.

例

- すべての具体的数で割切れる数を割り切る巨大数がある。
- 共起性：具体的な数 n については

$$R(1,y), R(2,y), \cdots, R(n,y)$$

を同時に満たす y が存在するとき、すべての具体的な i について $R(i,y)$ を同時に満たす y が存在する。
- 証明. $P(n) = \exists y\ \forall i \leq n\ R(i,y)$ に適用.

6

不定性と数学

- 選択肢外の選択 ⇒ 不定性

  郡司ペギオー幸夫「生命と時間、そして原生」(現代思想連載 1994-1996)

- クリプキ「plus/quus」 ⇒ 「確定」の不定性

  角田秀一郎 1997：Russel の逆理の懐疑的解決

- 内部観測の数学への「応用」：（無限集合が排除した）不定性を回復

7 無限集合のコスト：不定性の忌避

1. カントールの楽園：「不定な有限」を無限集合として凍結
2. コスト：整合性に強く依存
3. 整合性 $\overset{\text{Hilbert}}{\Longrightarrow}$ 形式系の無矛盾性

   $\Rightarrow$ 「無矛盾性」確定のため「数」を確定する必要あり
4. $\Rightarrow$ 有限概念の質的単一化 （"the $\mathbb{N}$" 仮説）

逆理の取り込み

- 無限の逆理の取り込み $\Rightarrow$ 無限集合
- 砂山の逆理の取り込み $\Rightarrow$ 複数の有限概念（$\Rightarrow$「巨大数」）

基盤的例

定義

$(X, \approx)$ が連続体 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\approx$ が Sorites 的同値関係 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\approx^* = X \times X$

1. $1 \ll \Omega$ とする.
2. 定義. $x \approx_\Omega y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |x - y|$ に具体的な数をかけても Ω より小さい.
3. $\approx_\Omega$ は同値関係
4. (Soritex Paradox) $1 \approx_\Omega 2 \approx_\Omega \cdots \approx_\Omega \Omega$ しかし、$1 \not\approx_\Omega \Omega$
5. $[0, 1] := (\{1, \cdots, \Omega\}, \approx_\Omega)$: 連続な 01 区間
6. Ω の取り方に「よらない」 (連続体として「同型」)

9 連続体の位相的性質

連続体 $(X, \approx)$ の位相的概念

1. 連結性．どの 2 点も sorites 列で結ばれる（いつも真）．
2. 完備性．コーシー列が収束する（いつも真）．
3. a が有限列 (x_i) の集積点 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x_i \approx a$ を満たす i が巨大数個ある。
4. コンパクト性 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 巨大項数の有限列は集積点をもつ.

命題

任意の巨大数 α について以下が成立するなら $(X, \approx)$ はコンパクト.

1. $X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup \cdots \bigcup X_\alpha$ と分割し
2. 各 i について、$x, y \in X_i$ ならば $x \approx y$.

10 離散距離空間が定める連続体

1. (X, d): 有限距離空間,d:整数値,1-connected
   - 1-connected とは $d(x, y) = 1$ となる x, y を辺で結ぶグラフが連結
2. $\Omega = \max\{d(x, y)\}$:直径
3. $x \approx y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} d(x, y) \approx_{\Omega} 0$
4. $(X, \approx)$: 連続体（距離空間）.

11 例：無限離散群が定める連続体

群の Cayley グラフ

1. Γ: A で生成される群 (s.t. $A^{-1} \subset A$)
2. $E = \left\{ (g, ga) \mid g \in \Gamma, a \in A \right\}$：Cayley グラフ $\Rightarrow$ 距離
3. $\Gamma_\Omega :=$ 単位元からの距離が Ω 以下の要素の全体
4. $(\Gamma_\Omega, \approx)$: 有限生成群の定める連続体

例

1. $\Gamma = \mathbb{Z}^n, A = \{\pm e_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$
   $(\Gamma, \approx)$ は「$\mathbb{R}^n$」.
2. $\Gamma = \{a, b\}$ が生成する自由群： $(\Gamma, \approx)$: 双曲的距離空間

12 Hamming 距離空間

1. $\mathsf{V} = \{\, 0, 1 \,\}^{\Omega}$: 長さ Ω の 01 語の全体

   べき集合 pow $(\{1, \cdots, \Omega\})$ でもある
2. Hamming 距離： $\mathsf{d}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = |\mathsf{x} \bigtriangleup \mathsf{y}|$:
3. $\mathsf{x} \approx \mathsf{y} \Leftrightarrow \mathsf{d}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \approx_{\Omega} 0$.
4. $\mu(\mathsf{x}) = \dfrac{|\mathsf{x}|}{\Omega}$: V 上の「確率測度」
5. $(\mathsf{V}, \approx)$ は、$\{1, \cdots, \Omega\}$ の部分集合を「無限小測度」の違いは無視して考えてえられる連続体

他の応用可能性

- **可算カテゴリカルな構造**
  - Random graph　**（すべての有限グラフを含む唯一の可算グラフ）**
  - P.S. Urysohn (1898-1924) **すべての有限距離空間を含む可算距離空間**
- **巨大証明図の意味**
  - Parikh **の定理** 1973. **「証明可能だが証明のサイズが大きく具体的には書けない論理式がある」**
- **「巨大文字列」の効用**
  - J. Herbrand(1908-1931) **の定理**

Herbrand の定理

Herbrand 1930

$\exists x.P(x)$ が証明可能 $\Leftrightarrow$ ある n について $\bigvee_{|t|<n} P(t)$ がトートロジー
(t は変数を含まない式)

「系」

$\exists x.P(x)$ が証明可能 $\Leftrightarrow$ $\bigvee_{|t|<\Omega} P(t)$ がトートロジー.

- 巨大有限項をモデル理論に使う可能性
- 弱無矛盾な理論に意味を与える有限「モデル」